Wasser und Objekte (10 pt)

In dieser Aufgabe geht es um die Phänomene, die durch die Wechselwirkung zwischen Wasser und Objekten im Zusammenhang mit der Oberflächenspannung entstehen. Teil A behandelt Bewegung, während sich die Teile B und C auf statische Situationen beziehen.

Falls nötig, kann man die Tatsache nutzen, wenn die Funktion $y(x)$ die Differentialgleichung $y''(x) = ay(x)$ (a ist eine positive Konstante) erfüllt, dass dann ihre allgemeine Lösung $y(x) = Ae^{\sqrt{a}x} + Be^{-\sqrt{a}x}$ ist, wobei A und B wiederum beliebige Konstanten sind.

Teil A. Vereinigung von Wassertropfen (2.0 Punkte)

Wie in Abb.1 dargestellt, betrachten wir zwei stationäre, kugelförmige Wassertropfen auf der Oberfläche eines super-hydrophoben Materials, d.h. eine sehr starke abstoßende Kraft wirkt zwischen dem Material und dem Wasser.

Zunächst werden zwei benachbarte identische kugelförmige Wassertropfen auf der Oberfläche platziert; dann vereinigen sich diese beiden Tropfen nach der Berührung miteinander und bilden einen größeren kugelförmigen Wassertropfen, der plötzlich nach oben springt.

A.1 Der Radius a der beiden Wassertropfen vor der Vereinigung ist 100 μm. Die Dichte von Wassers ρ ist 1.00×10^3 kg/m^3. Die Oberflächenspannung γ ist 7.27×10^{-2} J/m^2. Ein Teil k der Differenz der Oberflächenenergie vor und nach der Vereinigung, ΔE, wird in die kinetische Energie des springenden Wassertropfens umgewandelt. Bestimme dann die anfängliche Absprunggeschwindigkeit v des vereinigten Wassertropfens auf zwei signifikanten Nachkommastellen genau unter den folgenden Annahmen: **2.0pt**

- $k = 0.06$
- Vor und nach der Vereinigung bleibt das gesamte Wasservolumen erhalten.

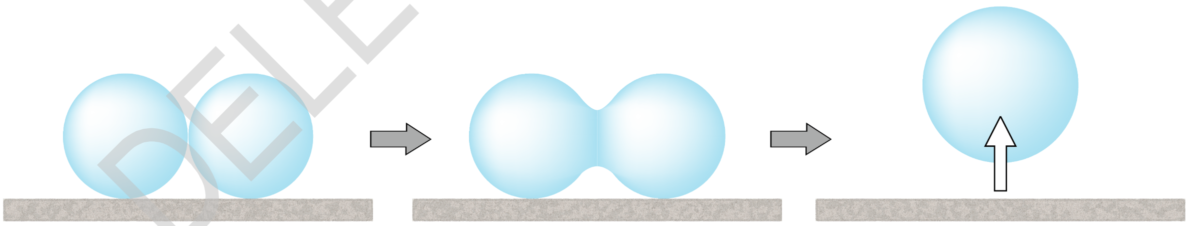

Abb. 1: Vereinigung zweier Wassertropfen und das Hochspringen des vereinigten Wassertropfens.

Teil B. Eine senkrecht stehende Platte (4.5 Punkte)

Eine flache Platte wird senkrecht stehend ins Wasser eingetaucht. Die Abbildungen 2(a) und 2(b) zeigen die Form der Wasseroberfläche für hydrophile bzw. hydrophobe Plattenmaterialien. Dabei vernachlässigen wir die Dicke der Platte.

Die Plattenoberfläche liegt in der yz-Ebene , und die horizontale Wasseroberfläche, die von der Platte weit entfernt ist, liegt in der xy-Ebene mit $z = 0$. Die Form der Oberfläche hängt nicht von der y-Koordinate ab. $\theta(x)$ sei der Winkel zwischen der Wasseroberfläche und der horizontalen Ebene in einem Punkt (x, z) auf der Wasseroberfläche in der xz-Ebene . Hier wird $\theta(x)$ in Bezug auf die positive x-Achse gemessen, und die Drehung gegen den Uhrzeigersinn wird als positiv angenommen. $\theta(x)$ sei θ_0 an dem Kontaktpunkt von der Platte mit der Wasseroberfläche ($x = 0$). Im Folgenden wird θ_0 durch die Eigenschaften des Plattenmaterials festgelegt.

Die Dichte von Wasser ρ ist konstant und die Oberflächenspannung des Wassers γ ist überall gleich groß. Die Erdbeschleunigung ist durch g gegeben. Es wird angenommen, dass der atmosphärische Druck P_0 immer überall gleich groß ist. Bestimmen wir die Form der Wasseroberfläche in den folgenden Schritten. Beachte, dass die Einheit der Oberflächenspannung J/m^2 bzw. N/m ist.

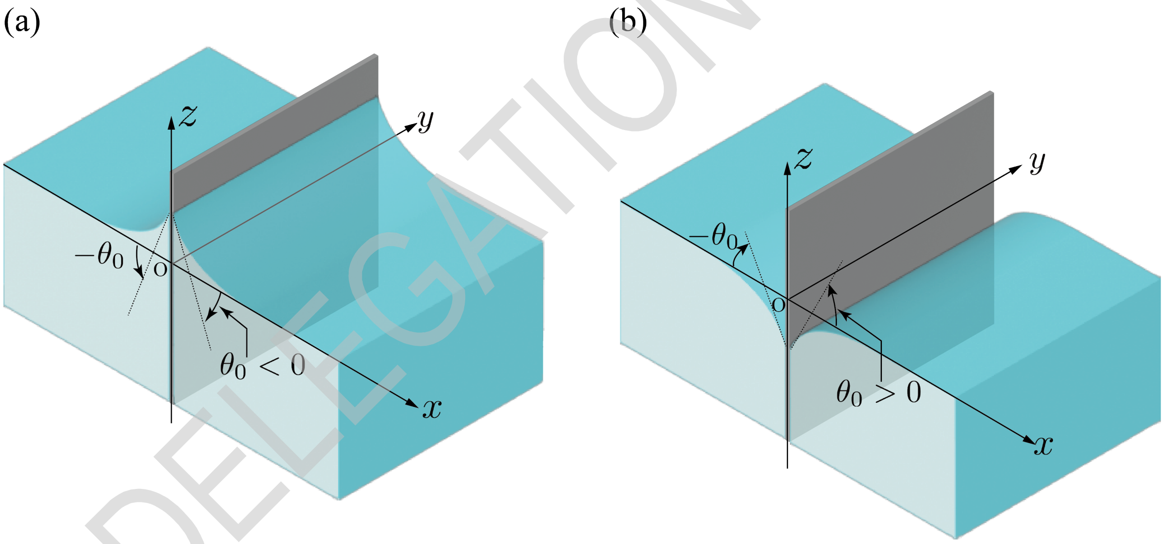

Abb. 2: Senkrecht ins Wasser getauchte Platten. (a) Fall einer hydrophilen Platte;
(b) Fall einer hydrophoben Platte.

B.1	Wir betrachten den Fall einer hydrophilen Platte, wie in Abb.2(a) dargestellt. Wir stellen fest, dass der Wasserdruck P die Bedingungen $P < P_0$ für $z > 0$ und $P = P_0$ für $z = 0$ erfüllt. Drücke dann P an der Stelle z in Form von ρ, g, z und P_0 aus.	0.6pt

B.2	Wir betrachten einen Wasserblock, dessen Ausschnitt in Abb.3(a) schattiert dargestellt ist. Sein Querschnitt in der xz-Ebene ist in Abb.3(b) schraffiert dargestellt. z_1 und z_2 sind die Koordinaten der linken und rechten Kante der Grenze (sprich die Wasseroberfläche) zwischen dem Wasserblock und der Luft. Ermittle die horizontale Komponente (x-Komponente) der effektiven Kraft pro Längeneinheit entlang der y-Achse, f_x, die auf den Wasserblock ausgeübt wird, durch die Größen ρ, g, z_1 und z_2 ausgedrückt. Beachte, dass P_0 in keiner horizontal wirkenden effektiven Kraft auf den Wasserblock resultiert.	0.8pt

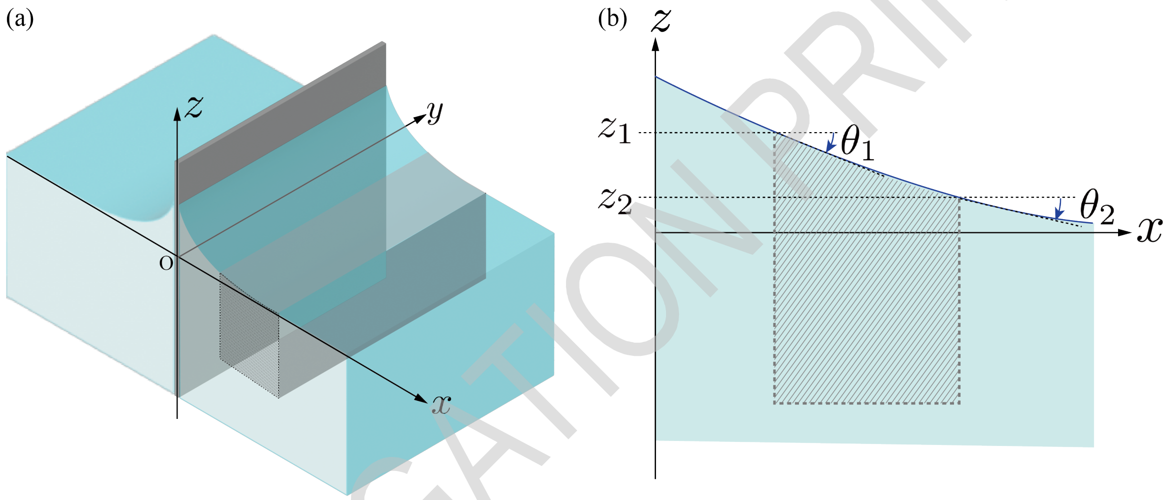

Abb. 3: Form des Ausschnitts des Wasserblocks an der Wasseroberfläche. (a) Ansicht aus der Vogelperspektive und (b) des Querschnitts.

B.3	Die auf den Wasserblock wirkende Oberflächenspannung wird durch die in B.2 beschriebene Kraft f_x ausgeglichen. Wir definieren jeweils θ_1 und θ_2 als Winkel zwischen der Wasseroberfläche und der horizontalen Ebene am linken und rechten Rand. Drücke f_x durch die Größen γ, θ_1 und θ_2 aus.	0.8pt

B.4 Die folgende Gleichung gilt für einen beliebigen Punkt (x, z) auf der Wasseroberfläche, (0.8pt)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^a + \cos\theta(x) = \text{constant}. \tag{1}$$

Bestimme den Exponenten a und drücke die Konstante ℓ durch die Größen γ und ρ aus.
Diese Gleichung gilt sowohl für hydrophile als auch für hydrophobe Platten.

B.5	Nimm an, dass sich die Höhe z der Wasseroberfläche nur geringfügig mit x ändert, also dass $\lvert z'(x) \rvert \ll 1$ ist. Drücke damit $\cos \theta(x)$ in Gleichung (1) aus B.4 durch die Ableitung $z'(x)$ bis zur zweiten Ordnung (in $z'(x)$) aus. Leite danach die Gleichung nach x ab, um eine Differentialgleichung für $z(x)$ zu erhalten. Löse diese Differentialgleichung und drücke $z(x)$ für $x \geq 0$ durch die Größen $\tan \theta_0$ und ℓ aus. Beachte, dass die vertikale Richtungen in Abb.2 und Abb.3 zur besseren Anschauung übertrieben dargestellt sind, und sie dadurch nicht der Vorraussetzung $\lvert z'(x) \rvert \ll 1$ entsprechen.	1.5pt

Teil C. Wechselwirkung zwischen zwei Stäben (3.5 Punkte)

Die identischen, parallel auf der Wasseroberfläche schwimmenden, Stäbe A und B aus demselben Material werden im gleichen Abstand von der y-Achse platziert (Abb.4).

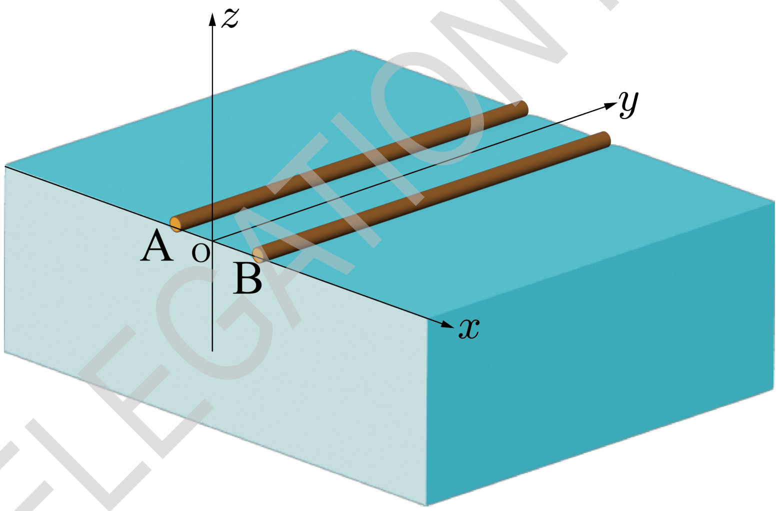

Abb. 4: Zwei Stäbe A und B schwimmend auf der Wasseroberfläche.

C.1	Wir definieren z_a und z_b als die z-Koordinaten der Kontaktpunkte zwischen Stab B und der Wasseroberfläche, sowie die Winkel θ_a und θ_b wie in Abb. 5 eingezeichnet. Drücke die horizontale Komponente F_x der Kraft pro Längeneinheit auf Stab B in y-Richtung durch die Größen θ_a, θ_b, z_a, z_b, ρ, g und γ aus.	1.0pt

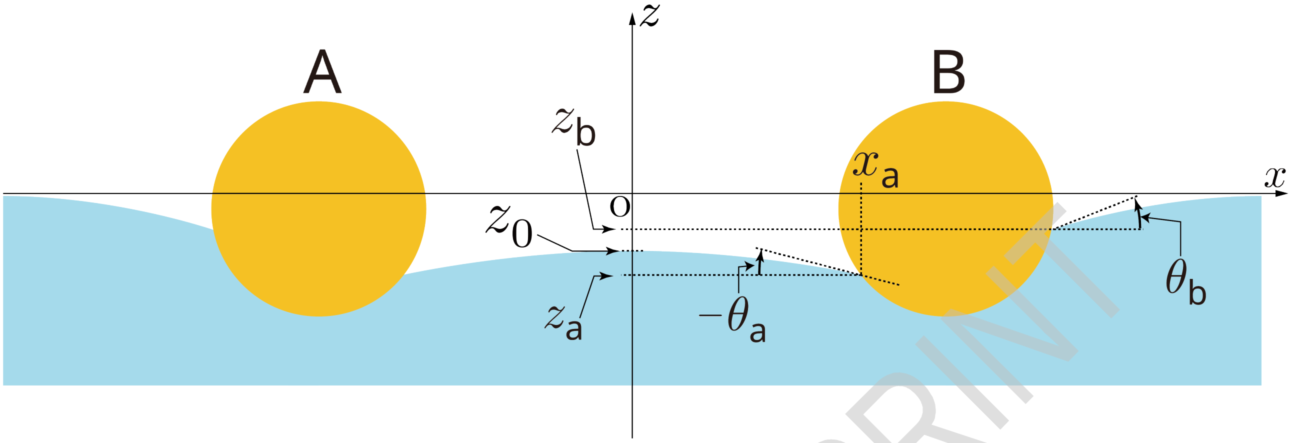

Abbildung 5: Vertikale Seitenansicht (entlang der xz-Ebene) zweier Stäbe, die auf dem Wasser schwimmen.

C.2	Wir definieren die z-Koordinate der Wasseroberfläche, z_0, im Mittelpunkt zweier Stäbe in der xz -Ebene. Drücke die in C.1 erhaltene Kraft F_x aus, ohne die Größen θ_a, θ_b, z_a und z_b zu verwenden.	1.5pt

C.3	x_a sei die x-Koordinate des Berührungspunktes zwischen der Wasseroberfläche und der linken Seite des Stabes B. Drücke mit Hilfe der in B.4 erhaltenen Differentialgleichung die Koordinate der Wasserhöhe z_0 des Mittelpunktes zwischen den beiden Stäbe A und B durch die Größen von x_a und z_a aus. Du kannst die in B.4 eingeführte Konstante ℓ dabei verwenden.	1.0pt