

Neutronensterne (10 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Stabilität großer Kerne diskutiert und die Masse von Neutronensternen theoretisch und experimentell abgeschätzt.

Teil A. Masse und Stabilität von Atomkernen (2,5 Punkte)

Die Ruheenergie eines Kerns $m(Z, N)c^2$, der aus Z Protonen und N Neutronen besteht, ist um die Bindungsenergie $B(Z, N)$ kleiner als die Summe der Ruheenergien von allen Protonen und Neutronen (im Folgenden Nukleonen genannt). c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Die Bindungsenergie setzt sich aus dem Volumenterm (Konstante a_V assoziiert), dem Oberflächenterm (Konstante a_S assoziiert), dem Coulomb-Energieterm (Konstante a_C assoziiert) und dem Symmetrie-Energieterm (Konstante a_{sym} assoziiert) zusammen und kann auf folgende Weise angenähert werden (weitere Korrekturterme werden nicht beachtet):

$$m(Z, N)c^2 = Am_Nc^2 - B(Z, N), \quad B(Z, N) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N - Z)^2}{A}, \quad (1)$$

wobei $A = Z + N$ die Massenzahl und m_N die Masse eines Nukleons ist. Verwende $a_V \approx 15.8$ MeV, $a_S \approx 17.8$ MeV, $a_C \approx 0.711$ MeV und $a_{\text{sym}} \approx 23.7$ MeV (MeV = 10^6 Elektronenvolt) für die Berechnung.

A.1 Angenommen $Z = N$, bestimme A , sodass die Bindungsenergie pro Nukleon (B/A) maximal ist. 0.9pt

A.2 Für einen Atomkern mit fixierter Massenzahl A wird die Ordnungszahl (Anzahl der Protonen) des stabilsten Kerns Z^* durch Maximierung der Bindungsenergie $B(Z, A - Z)$ bestimmt. Berechne Z^* für $A = 197$ mit Hilfe von Gleichung (1). 0.9pt

A.3 Ein Kern mit großer Massenzahl A zerfällt durch Spaltung in leichtere Kerne, falls dadurch die gesamte Ruhemassenenergie minimiert wird. Einfachheit halber wird angenommen, der Kern zerfällt in zwei identische Kerne. In diesem Fall gilt: 0.7pt

$$m(Z, N)c^2 > 2m(Z/2, N/2)c^2,$$

Diese Ungleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$Z^2/A > C_{\text{fission}} \frac{a_S}{a_C},$$

Berechne C_{fission} auf zwei signifikanten Stellen.

Teil B. Neutronenstern als gigantischer Kern (1,5 Punkte)

Große Kerne mit einer großen Massenzahl $A > A_c$, mit einem Schwellenwert A_c , bleiben aufgrund der ausreichend großen Schwerkraft, die zur Bindungsenergie beiträgt, stabil gegen Kernspaltung.

- B.1** Wir nehmen an, dass $N = A$ und $Z = 0$ für hinreichend große A realisiert werden und bestehende Terme von Gleichung (1) nicht verändert werden. Zusätzlich zur Bindungsenergie wird ein Term für die Gravitations-Bindungsenergie eingeführt: 1.5pt

$$B_{\text{grav}} = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

wobei $M = m_N A$ und $R = R_0 A^{1/3}$ mit $R_0 \simeq 1.1 \times 10^{-15} \text{ m} = 1.1 \text{ fm}$ die Masse bzw. den Radius des Kerns bezeichnen.

Sei $B_{\text{grav}} = a_{\text{grav}} A^{5/3}$, berechne a_{grav} in der Einheit MeV bis zur ersten signifikanten Stelle. Berechne dann A_c bis zur ersten signifikanten Stelle, unter Vernachlässigung des Oberflächenterms. Verwende dabei die numerischen Werte $m_N c^2 \simeq 939 \text{ MeV}$ und $G = \hbar c / M_P^2$, wobei $M_P c^2 \simeq 1.22 \times 10^{22} \text{ MeV}$ und $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ ist.

Teil C. Neutronenstern in einem Doppelsternsystem (6,0 Punkte)

Einige Neutronensterne sind Pulsare, die regelmäßig elektromagnetische Wellen mit einer konstanten Periode aussenden. Diese nennen wir hier der Einfachheit halber "Licht". Neutronensterne bilden oft Doppelsternsysteme mit einem Weißen Zwerg. In Abbildung 1 ist eine Sternkonfiguration gezeigt, bei der ein Lichtpuls vom Neutronenstern **N** zur Erde **E** in der Nähe eines Weißen Zwergs **W** vorbei verläuft. Die Messung dieser Lichtimpulse, die durch die Schwerkraft des Weißen Zwergs beeinflusst werden, führen zu einer genauen Schätzung der Masse von **W**, wie weiter unten erläutert wird, was wiederum zur Schätzung der Masse von **N** führt.

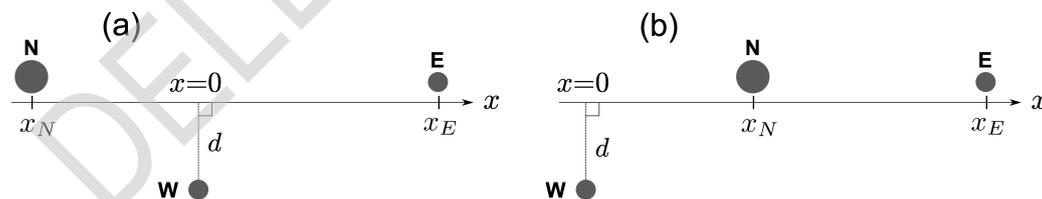
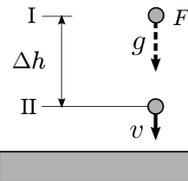


Abb. 1: Konfigurationen, bei denen die x -Achse auf der Verbindungslinie zwischen **N** und **E** zu liegen kommt. (a) für $x_N < 0$ und (b) für $x_N > 0$.

- C.1** Wie in der Abbildung unten gezeigt, stellen wir uns zwei Ebenen I und II vor, welche durch eine Höhendifferenz Δh getrennt sind. Diese befinden sich in einem konstanten Gravitationsfeld g . Auf Level I und II, sowie beim frei fallenden System F , werden identische Uhren aufgestellt. Diese werden mit Uhr-I, Uhr-II und Uhr- F bezeichnet. 1.0pt



Aufbau des Gedankenexperiments:

Wir nehmen an, dass ein Beobachter bei der Uhr F sitzt, welche sich zu Beginn auf der gleichen Höhe wie Uhr I befindet. Die Uhr F befindet in Ruhe und da die Uhren identisch sind, messen sie folglich auch die gleichen Zeitintervalle $\Delta\tau_F = \Delta\tau_I$.

Nun lassen wir F frei fallen und werden fort an auch im Bezugssystem von F arbeiten, welches als Inertialsystem behandelt werden kann. Die Uhr II kommt dann mit einer Geschwindigkeit v (bei Uhr F) vorbei, sodass die Zeitdilatation von Uhr II durch die Lorentztransformation bestimmt werden kann. Während also in F die Zeit $\Delta\tau_I$ auf der Uhr F vergeht, vergeht auf der Uhr II die Zeit $\Delta\tau_{II}$. Bestimme den Term $\Delta\tau_{II}$ in Abhängigkeit von $\Delta\tau_I$ (bis und mit erster Ordnung in $\Delta\phi/c^2$). Dabei ist $\Delta\phi = g\Delta h$ eine Differenz des Gravitationspotentials, das heißt die Gravitationspotentialenergie pro Masseneinheit.

- C.2** Unter dem Gravitationspotential ϕ ändert die effektive Lichtgeschwindigkeit c_{eff} , die von einem Beobachter, der unendlich weit entfernt plaziert ist, beobachtet wird. Dies, obwohl die lokale Lichtgeschwindigkeit c ist. Wenn $\phi(r = \infty) = 0$, ist c_{eff} (in erster Ordnung in ϕ/c^2) gegeben durch 1.8pt

$$c_{\text{eff}} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c$$

einschließlich des Effekts der Raumverzerrung, welcher in **C.1** nicht berücksichtigt wurde. Wir bemerken, dass der Lichtweg durch eine gerade Linie angenähert werden kann.

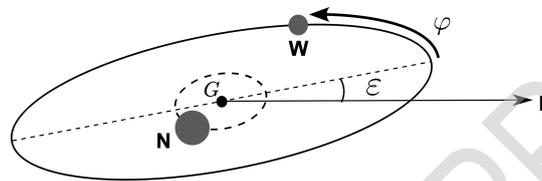
Wie in Abbildung 1(a) gezeigt, wählen wir die x -Achse so, dass sie entlang des Lichtwegs vom Neutronenstern **N** zur Erde **E** zu liegen kommt, und setzen $x = 0$ an den Punkt, an dem der Weiße Zwerg **W** dem Lichtpfad am nächsten ist. Sei $x_N (< 0)$ die x -Koordinate von **N**, $x_E (> 0)$ die von **E** und d die Entfernung zwischen **W** und dem Lichtweg.

Berechne die Änderungen Δt in der Ankunftszeit des Lichts von **N** nach **E**, die durch die Masse M_{WD} des Weißen Zwergs verursacht werden. Benutze $d/|x_N| \ll 1$, $d/x_E \ll 1$, und $GM_{\text{WD}}/(c^2 d) \ll 1$ um die Formel zu vereinfachen.

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + d^2} + x}{\sqrt{x^2 + d^2} - x} \right) + C. \quad (\log \text{ ist der natürliche Logarithmus})$$

- C.3** Nehme an, dass sich **N** und **W** in einem Doppelsternsystem auf kreisförmigen Bahnen mit einer Exzentrizität von Null um den Massenschwerpunkt G in der Bahnebene bewegen. ε ist der Bahnneigungswinkel, gemessen von der Bahnebene zu der von G nach **E** gerichteten Linie. Die Distanz zwischen **N** und **W** ist L und M_{WD} sei die Masse des Weißen Zwergs. Dieses System ist in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Im Folgenden gehen wir von $\varepsilon \ll 1$ aus. 1.8pt

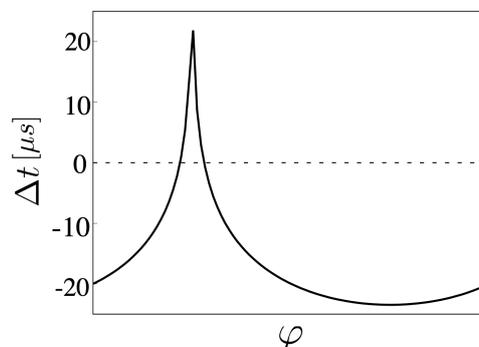


Binäres Sternensystem.

Wir beobachten die von **N** ausgehenden Lichtpulse von **E** aus, unter der Annahme dass **E** weit von **N** entfernt ist. Der Lichtweg nach **E** variiert mit der Zeit, abhängig von der Konfiguration von **N** und **W**. Die zeitliche Verzögerung der auf **E** ankommenden Pulse hat den maximalen Wert Δt_{max} für $x_N \simeq -L$ und den minimalen Wert Δt_{min} für $x_N \simeq L$ (siehe Abbildung 1(b) für die Konfiguration). Berechne $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$. Kleine Terme müssen (wie in **C.2**) nicht berücksichtigt werden.

Wir bemerken, dass allein die zeitliche Verzögerung aufgrund der Masse von **W** berücksichtigt wird und Effekte, welche aus der Schwerkraft anderer stellaren Objekten resultieren, nicht relevant sind für die Berechnung von $\Delta t_{\text{max}} - \Delta t_{\text{min}}$.

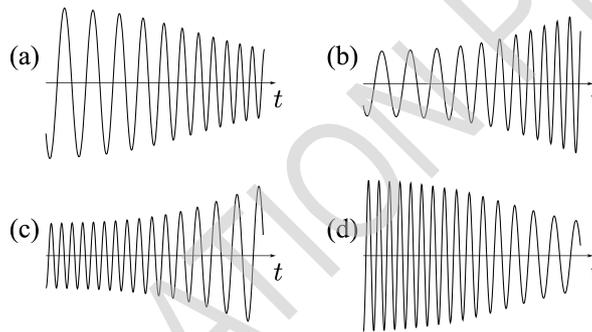
- C.4** Die folgende Abbildung zeigt die beobachteten zeitlichen Verzögerungen in Abhängigkeit der Orbitalphase φ für ein Doppelsternsystem mit $L \approx 6 \times 10^6$ km und $\cos \varepsilon \approx 0.99989$. Schätze M_{WD} in Abhängigkeit der Sonnenmasse M_{\odot} ab und berechne M_{WD}/M_{\odot} bis zur ersten signifikanten Stelle. Du kannst die Annäherung $GM_{\odot}/c^3 \approx 5 \mu\text{s}$ verwenden. 0.8pt



Beobachtete Zeitverzögerungen Δt in Abhängigkeit von der Orbitalphase φ (siehe Abbildung in **C.3**), um **N** und **W** auf den Bahnen zu lokalisieren.

- C.5** Im Doppelsternsystem von Neutronensternen setzen zwei Sterne Energie und Drehimpuls frei, indem sie Gravitationswellen aussenden und schließlich miteinander kollidieren und verschmelzen. Einfachheitshalber betrachten wir nur eine Kreisbewegung mit dem Radius R und der Winkelgeschwindigkeit ω . Dann gilt $\omega = \chi R^p$ mit der Konstante χ , die weder von ω noch von R abhängt, wenn relativistische Effekte ignoriert werden. Bestimme den Wert von p . 0.4pt

- C.6** Die Amplitude der vom Doppelsternsystem in **C.5** emittierten Gravitationswelle ist proportional zu $R^2\omega^2$. Die nachstehende Abbildung zeigt qualitativ vier verschiedene zeitliche Profile der beobachteten Gravitationswellen vor dem Zusammenstoß der beiden Sterne. Wähle zwischen den Optionen (a) bis (d) das am besten geeignete Profil aus. 0.2pt



Beobachtete Datenprofile von Gravitationswellen.