



Teilchen und Wellen (10 Punkte)

Der Welle-Teilchen-Dualismus, demnach jedes Teilchen als Welle beschrieben werden kann und umgekehrt, ist ein zentrales Konzept in der Quantenmechanik. Auf Basis dieses Prinzips und weniger weiterer Annahmen werden wir in dieser Aufgabe ausgewählte Quanten-Phänomene untersuchen. Diese decken die zwei Klassen von Teilchen der mikroskopischen Welt ab – Fermionen und Bosonen.

Quantenteilchen in einem Kasten (1.4 Punkte)

Betrachte die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem eindimensionalen Potentialtopf. In diesem ist die potentielle Energie des Teilchens $V(x)$ gegeben durch:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L; \\ \infty, & x < 0 \text{ or } x > L. \end{cases} \quad (1)$$

Klassische Teilchen können sich in einem solchen Potential mit beliebiger kinetischer Energie bewegen. Für Quantenteilchen sind hingegen nur einzelne, diskrete, positive Energieniveaus erlaubt. Jeder dieser erlaubten Zustände kann durch eine stehende de-Broglie-Welle beschrieben werden, die an den Wänden Knoten aufweist.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Bestimme die kleinstmögliche Energie E_{\min} eines Quantenteilchens in dem Topf. Drücke deine Antwort in Abhängigkeit von m , L , und der Planck-Konstante h aus. | 0.4pt |
|------------|--|-------|

Der Zustand des Teilchens mit der kleinstmöglichen Energie wird Grundzustand genannt. Alle anderen erlaubten Zustände werden als angeregte Zustände bezeichnet. Wir ordnen diese möglichen Energiewerte aufsteigend und bezeichnen sie mit E_n , beginnend mit E_1 für den Grundzustand.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.2 | Bestimme den allgemeinen Ausdruck für die Energie E_n (mit $n = 1, 2, 3, \dots$). | 0.6pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|---|-------|
| A.3 | Teilchen können unmittelbar von einem Zustand in einen anderen übergehen, jedoch nur durch Absorption oder Emission eines Photons, wobei die Energie des Photons dem Energieunterschied der beiden Zustände entspricht. Bestimme die Wellenlänge λ_{21} des Photons, das beim Übergang des ersten angeregten Zustands (E_2) in den Grundzustand (E_1) emittiert wird. | 0.4pt |
|------------|---|-------|

Teil B. Optische Eigenschaften von Molekülen (2.1 Punkte)

In diesem Teil werden wir verschiedene optische Eigenschaften des Cyanin-Moleküls Cy5 (einem weit verbreiteten Farbstoff, dargestellt in Abb. 1a) untersuchen. Dessen optische Eigenschaften werden überwiegend durch die Hauptkette mit ihren abwechselnden Einfach- und Doppelbindungen zwischen den Kohlenstoffatomen (dargestellt in Abb. 1b) bestimmt. Der Einfluss der Ringe am Ende des Moleküls sowie die Restgruppen R ist hingegen bedeutend geringer. Drei der vier Valenzelektronen jedes C-Atoms (und der N-Atome) in der Hauptkette gehen Bindungen ein. Die verbliebenen Valenzelektronen sind "verteilt" und können sich entlang der gesamten Kette bewegen. Die resultierend potentielle Energie eines jeden solchen Elektrons wird durch die oszillierende dünne Linie in Abb. 1c dargestellt; die Minima entsprechen der Positionen der C- und N-Atome.

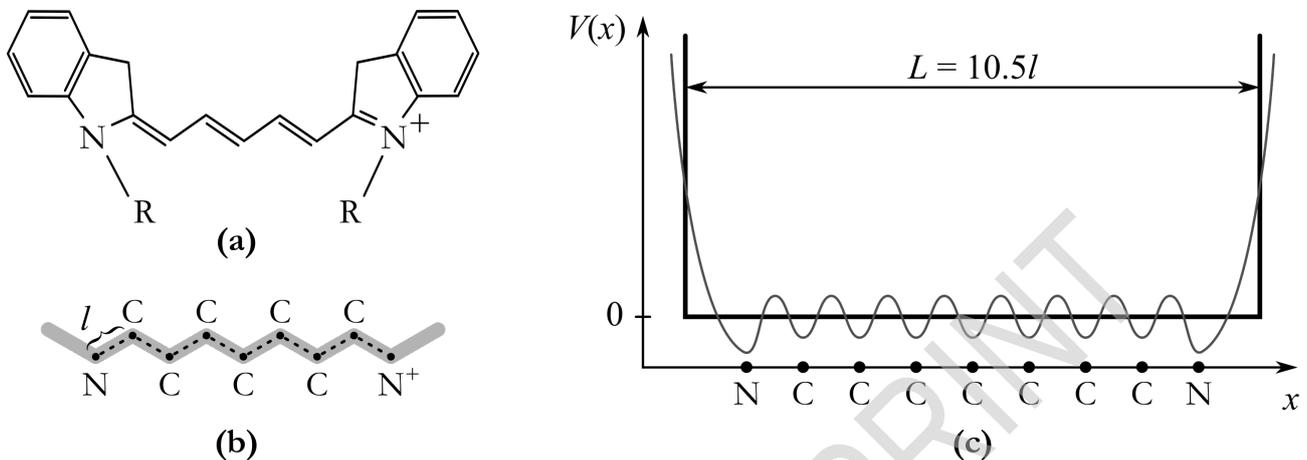


Abbildung 1. (a) Strukturformel des Cyanin-Moleküls Cy5 (zur Vereinfachung sind H-Atome nicht dargestellt, und R bezeichnet Restgruppen). (b) Die Hauptkette des Cy5-Moleküls, mit mittlerem Abstand l zwischen den Atomen. (c) Potentielle Energie eines Elektrons entlang der Hauptkette (dünne Linie) und deren Näherung durch eine Stufenfunktion wie in Gl. (1) (fett gedruckte Linie).

Zur Vereinfachung nähern wir diese potentielle Energie durch eine einfache Form wie in Gl. (1) an (siehe fett gedruckte Linie in Abb. 1c). Dabei ist $L = 10.5l$, mit einem mittleren Abstand von $l = 140$ pm zwischen den Atomen (siehe auch Abb. 1b). Im Ergebnis erhalten wir ein "Elektronengas" das sich aus 10 Elektronen zusammensetzt (7 von C-Atomen, 2 vom N-Atom und 1 vom N^+ -Ion), und sich wie bereits in Teil A untersucht in einem eindimensionalen Potential bewegt. In unserer Betrachtung können die gegenseitigen Wechselwirkungen der Elektronen vernachlässigt werden; wir müssen jedoch beachten, dass es sich bei Elektronen um Fermionen handelt, die dem Pauli-Ausschließungsprinzip folgen. Wir vernachlässigen zudem den Einfluss der anderen Elektronen, sowie die Bewegung der Atomkerne.

B.1 Bestimme die größte Wellenlänge λ eines Photons das vom Cy5-Molekül (Elektronen anfänglich im Grundzustand) absorbiert werden kann. Drücke deine Antwort mit Hilfe von l , physikalischen Konstanten und einem numerischen Vorfaktor aus. Berechne den numerischen Wert der Wellenlänge. 0.8pt

B.2 Ein weiteres Farbmolekül, Cy3, hat eine ähnliche Struktur, jedoch mit 2 C-Atomen weniger in der Hauptkette. Ist das Absorptionsspektrum von Cy3 im Vergleich zu dem von Cy5 in Richtung des blauen oder des roten Endes des Spektrums verschoben? Bestimme diese Verschiebung $\Delta\lambda$ numerisch. Nimm dabei an, dass das Fehlen der 2 C-Atome die Form des Moleküls nicht ändert, sondern dass sich nur die Länge der Hauptkette um zwei mittlere Atomabstände verringert. 0.4pt

Von einem angeregten Zustand kann das Molekül spontan in den Grundzustand übergehen, und dabei ein Photon emittieren. Die mittlere Rate K dieses Vorgangs (das ist die relative Abnahme der Anzahl der Moleküle im angeregten Zustand dN/N , über die Zeit dt , $K = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$) hängt von der Wellenlänge λ des emittierten Photons, dem elektrischen Dipolmoment d des Übergangs (von der Größenordnung $d \approx el$ mit der Elementarladung e), sowie der Permittivität des Vakuums ϵ_0 und der Planck-Konstante h ab.

B.3 Nutze Dimensionsanalyse und bestimme einen Ausdruck für die Rate der spontanen Emission in Abhängigkeit von ε_0 , h , λ , and d . Der numerische Vorfaktor in diesem Ausdruck ist $k = \frac{16}{3}\pi^3$. 0.7pt

B.4 Für das Cy5-Molekül gilt $d \approx 2.4\ell$. Berechne die mittlere Fluoreszenz-Lebenszeit τ_{Cy5} des niedrigsten angeregten Zustands von Cy5, definiert als reziproker Wert der Rate des strahlenden Übergangs in den Grundzustand. 0.2pt

Teil C. Bose-Einstein-Kondensation (1.5 Punkte)

Dieser Teil hängt nicht direkt mit den Teilen A und B zusammen. Wir möchten darin das kollektive Verhalten bosonischer Teilchen untersuchen. Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Ausschließungsprinzip. Bei niedrigen Temperaturen oder hohen Dichten kann es bei Bosonen zu einem drastischen Phänomen, der Bose-Einstein-Kondensation (BEC) kommen. Dabei handelt es sich um einen Phasenübergang zu einem interessanten, kollektiven Quantenzustand: Eine große Zahl identischer Teilchen "kondensiert" in einen einzelnen Quantenzustand und beginnt, sich wie ein einzelnes Atom zu verhalten. Üblicherweise wird dies durch das Abkühlen einer festen Zahl von Teilchen unterhalb einer kritischen Temperatur erreicht. Im Prinzip könnte auch bei konstanter Temperatur die Teilchendichte über einen kritischen Wert hinaus erhöht werden.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Teilchendichte beim Übergang. Eine Abschätzung deren kritischer Werte kann durch eine einfache Beobachtung gewonnen werden: *Bose-Einstein Kondensation tritt auf, wenn die de-Broglie-Wellenlänge der Teilchen (bei ihrer mittleren quadratischen Geschwindigkeit) dem charakteristischen Abstand zwischen den Teilchen im Gas entspricht.*

C.1 Betrachte ein nicht-wechselwirkendes Gas von ^{87}Rb -Atomen im thermischen Gleichgewicht. Schreibe Ausdrücke für den typischen linearen Impuls p und die typische de-Broglie-Wellenlänge λ_{dB} in Abhängigkeit der atomaren Masse m , Temperatur T und physikalischer Konstanten. 0.4pt

C.2 Berechne den typischen Abstand der Teilchen in einem Gas ℓ in Abhängigkeit der Teilchendichte n . Leite damit die kritische Temperatur T_c als Funktion der atomaren Masse, der Teilchendichte und physikalischer Konstanten her. 0.5pt

Um Bose-Einstein-Kondensate im Labor zu erzeugen, kühlen Experimentalphysiker Gase auf Temperaturen bis zu $T_c = 100 \text{ nK}$ ab.

C.3 Bestimme die Teilchendichte n_c eines Rb-Gases für einen Übergang zum Bose-Einstein-Kondensat bei dieser Temperatur. Berechne zum Vergleich auch die "übliche" Teilchendichte n_0 eines idealen Gases unter Standardbedingungen (also $T_0 = 300 \text{ K}$ und $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$). Um welchen Faktor ist das "übliche" Gas dichter? Die Masse der Atome kann mit 87 atomaren Masseneinheiten (m_{amu}) angenommen werden. 0.6pt

Teil D. Optisches Gitter aus drei Strahlen (5 Punkte)

Erste Bose-Einstein-Kondensate wurden 1995 erzeugt. Seitdem hat sich die experimentelle Arbeit in ver-



schiedene Richtungen entwickelt. In diesem Teil werden wir eine besonders fruchtbare Idee untersuchen, das Kondensat in ein räumlich-periodisches Potential einzubringen. Das Potential wird durch die Interferenz mehrerer kohärenter Laser-Strahlen erzeugt. Aufgrund der regelmäßigen Struktur der entstehenden Interferenzmuster werden diese als *optische Gitter* bezeichnet. Die potentielle Energie $V(\vec{r})$ eines Atoms bei Bewegung in einem optischen Gitter ist proportional zur lokalen Intensität des Lichts. Es darf angenommen werden, dass

$$V(\vec{r}) = -\alpha \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle. \quad (2)$$

Dabei ist α eine *positive* Konstante, und die spitzen Klammern bezeichnen das zeitliche Mittel, welches schnelle zeitliche Oszillationen entfernt. Das elektrische Feld, das durch den i -ten Laser erzeugt wird, wird beschrieben durch

$$\vec{E}_i = E_{0,i} \vec{e}_i \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (3)$$

mit der Amplitude $E_{0,i}$, dem Wellenvektor \vec{k}_i , und dem Einheitsvektor der Polarisation \vec{e}_i . Kennts dich aus?

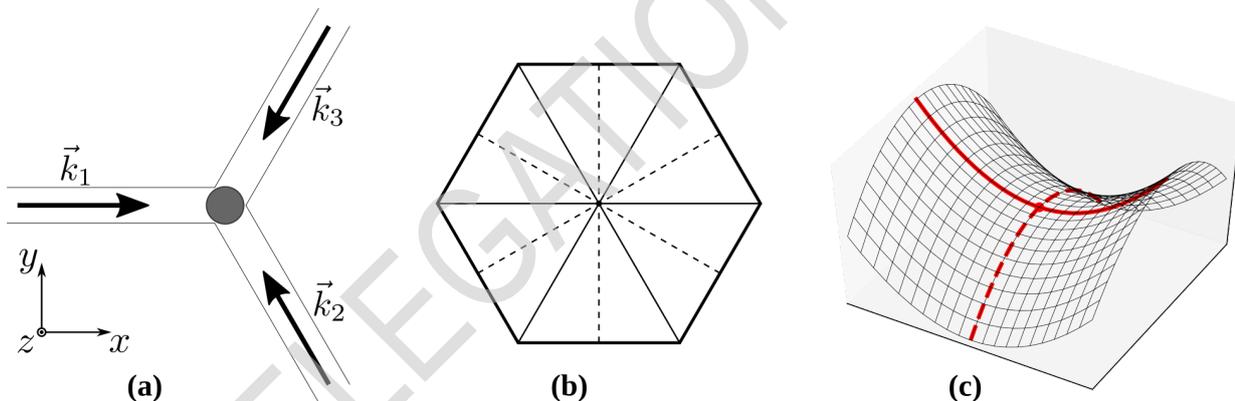


Abbildung 2. (a) Optisches Gitter aus drei Strahlen: drei ebene Wellen mit Wellenvektoren $\vec{k}_{1,2,3}$ kreuzen und interferieren in dem Bereich des grauen Kreises. (b) Symmetrien eines regelmäßigen Sechsecks: Durchgezogene und gestrichelte Linien zeigen zwei Gruppen von Symmetriachsen. (c) Sattelpunkt: Ein Punkt auf der Oberfläche an dem die Anstiege in orthogonale Richtungen verschwinden, an dem jedoch kein lokales Extremum der dargestellten Funktion vorliegt. Folgt man der durchgezogenen Linie, beobachtet man scheinbar ein Minimum. Eine zusätzliche Betrachtung der dazu senkrechten Richtung (gestrichelte Linie) wird benötigt, um ein echtes Minimum von eine Sattelpunkt (dargestellt) zu unterscheiden.

In der Aufgabe soll ein *dreieckiges optisches Gitter*, erzeugt durch Interferenz von drei Laserstrahlen gleicher Intensität, untersucht werden. Ein typischer Aufbau ist in Abb. 2a gezeigt. Dort sind alle drei Strahlen in z -Richtung polarisiert, breiten sich in der xy -Ebene aus, und schneiden sich jeweils im Winkel von 120° . Wähle die Richtung der x -Achse parallel zum Wellenvektor \vec{k}_1 .

- D.1** Nutze Gleichungen (2) und (3) um einen Ausdruck für die potentielle Energie $V(\vec{r})$ als Funktion von $\vec{r} = (x, y)$ in der Ausbreitungsebene der Laserstrahlen zu erhalten. 1.4pt

Hinweis: Das Ergebnis kann elegant als Summe eines konstanten Terms und dreier Cosinus-Funktionen mit Argumenten $\vec{b}_i \cdot \vec{r}$ ausgedrückt werden. Schreib dein Ergebnis in dieser Form und bestimme die Vektoren \vec{b}_i .

- D.2** Die resultierende potentielle Energie ist sechsfach rotationssymmetrisch, d.h. die Potentialverteilung ändert sich nicht bei Rotation um Vielfache von 60° um den Ursprung. Finde ein einfaches Argument dafür, dass diese Symmetrie tatsächlich vorliegt. 0.5pt

Die oben beobachtete Symmetrie vereinfacht die Analyse des zweidimensionalen Potentialverteilung $V(\vec{r})$. Wie in Abb. 2b gezeigt, hat ein Sechseck Symmetrieachsen die gegenüberliegende Ecken verbinden (durchgezogene Linien), und solche zwischen den Mittelpunkten gegenüberliegender Seiten (gestrichelte Linie). In unserem Fall müssen wir daher keine Darstellungen des zweidimensionalen Potentials erstellen und analysieren, sondern können viele Einsichten gewinnen in dem wir uns auf die x - und y -Achsen konzentrieren, welche entlang von Symmetrieachsen verlaufen.

- D.3** Leite das Verhalten des Potentials $V(\vec{r})$ entlang der Achsen des Koordinatensystems ab: Bestimme also die Funktionen $V_X(x) \equiv V(x, 0)$ und $V_Y(y) \equiv V(0, y)$. Finde die Lage der Extrema von $V_X(x)$ und $V_Y(y)$ als Funktionen eines einzigen Parameters. Da diese Funktionen periodisch sind, gib bitte jeweils nur einen Vertreter jeder Familie sich periodisch wiederholender Minima und Maxima an. 1.2pt

Wir möchten die Lage der so genannten *Gitterplätze*, d.h. der Minima des gesamten zweidimensionalen Potentials $V(\vec{r})$, bestimmen. Die zuvor gefundenen Minima der Funktionen V_X und V_Y mit einem Parameter zeigen deren vermutete Lage, das Vorliegen eines Sattelpunkts muss jedoch noch ausgeschlossen werden. Wie in Abb. 2c dargestellt, können Sattelpunkte bei Betrachtung nur einer Richtung fälschlicherweise wie Minima aussehen, sind es aber nicht.

- D.4** Untersuche die Ergebnisse der vorigen Aufgabe auf das Vorliegen tatsächlicher Minima des optischen Gitters: Identifiziere alle gleichwertigen Minima mit geringstem Abstand (jedoch nicht identisch) zum Ursprung. Bestimme den Abstand a zwischen den nächstliegenden Minima, in anderen Worten: die *Gitterkonstante* des optischen Gitters. Drücke deine Antwort in Abhängigkeit der Wellenlänge des Lasers λ_{las} aus. 0.8pt

Da ultrakalte Atome elektrisch neutral sind, wechselwirken sie nur dann relevant miteinander, wenn zwei oder mehrere Atome die gleiche Stelle eines optischen Gitters besetzen. Experimentalphysiker/innen können jedoch auch Systeme auf Basis weitreichender Wechselwirkungen untersuchen. Ein möglicher Ansatz dafür ist das Erzeugen so genannter *Rydberg-Atome*, welche sehr groß sind und weitere außergewöhnliche Eigenschaften aufweisen. Bei Rydberg-Atomen handelt es sich um angeregte Atome mit einem Elektron in einem Zustand mit sehr hoher Hauptquantenzahl n . Die Größe eines Rydberg-Atoms kann durch den Radius einer klassischen, kreisförmigen Bahn eines Elektrons mit Bahndrehimpuls $n\hbar$ (mit der reduzierten Planck-Konstante \hbar) abgeschätzt werden.



- D.5** Berechne den Wert von n für den der Radius eines Rb Rydberg-Atoms, der vergleichbar mit Wellenlänge des Laserlichts, $\lambda_{\text{las}} = 380 \text{ nm}$ ist. Gib deine Antwort in Abhängigkeit von λ_{las} und physikalischer Konstanten an. Berechne auch den numerischen Wert. 1.1pt

DELEGATION PRINT