

Elektrostatische Linse (10 Punkte)

Betrachte einen homogen geladenen metallischen Ring mit Radius R und Gesamtladung q . Der Ring ist ein hohler Torus mit Dicke $2a \ll R$. Diese Dicke kann in Teil A, B, C und E vernachlässigt werden. Der Ring liegt in der xy -Ebene, die z -Achse steht senkrecht dazu, wie in Abb. 1 gezeigt. In Teil A und B könnte die folgende Formel nützlich sein (Taylor-Entwicklung):

$$(1+x)^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon x + \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon-1)x^2, \text{ when } |x| \ll 1.$$

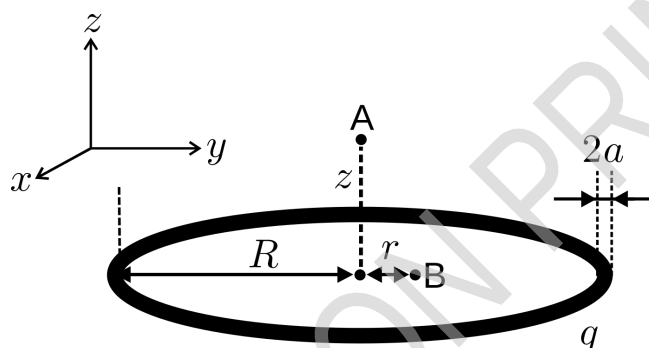


Abb. 1. Ein geladener Ring mit Radius R .

Teil A. Elektrostatisches Potential entlang der Achse des Rings (1 Punkt)

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.1 | Berechne das elektrostatische Potential $\Phi(z)$ entlang der Achse des Rings in Entfernung z vom Mittelpunkt (Punkt A in Abb. 1). | 0.3pt |
| A.2 | Berechne das elektrostatische Potential $\Phi(z)$ zur niedrigsten nicht-verschwindenden Ordnung in z , unter der Annahme dass $z \ll R$. | 0.4pt |
| A.3 | Ein Elektron (Masse m und Ladung $-e$) wird bei Punkt A platziert (Abb. 1, $z \ll R$). Wie groß ist die Kraft, die auf das Elektron wirkt? Bestimme mithilfe des Ausdrucks für die Kraft das Vorzeichen von q , sodass die entstehende Bewegung eine Schwingung ergibt. Das bewegte Elektron beeinflusst die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht. | 0.2pt |
| A.4 | Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω einer solchen harmonischen Schwingung? | 0.1pt |

Teil B. Elektrostatisches Potential in der Ringebene (1.7 Punkte)

In diesem Aufgabenteil wird das Potential $\Phi(r)$ in der Ringebene ($z = 0$) für $r \ll R$ (Punkt B in Abbildung 1) analysiert. Zur niedrigsten nicht-verschwindenden Ordnung in r kann das elektrostatische Potential als $\Phi(r) \approx q(\alpha + \beta r^2)$ ausgedrückt werden.

B.1 Finde den Ausdruck für β . Der oben gegebene Ausdruck (Taylor-Entwicklung) könnte dabei nützlich sein. 1.5pt

B.2 Ein Elektron wird bei Punkt B platziert (Abb. 1, $r \ll R$). Wie groß ist die Kraft, die auf das Elektron wirkt? Bestimme mithilfe des Ausdrucks für die Kraft das Vorzeichen von q , sodass die entstehende Bewegung eine Schwingung ergibt. Das bewegte Elektron beeinflusst die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht. 0.2pt

Teil C. Brennweite der idealisierten elektrostatischen Linse: instantaner Ladevorgang (2.3 Punkte)

Ein Apparat zur Fokussierung von Elektronen soll konstruiert werden - eine elektrostatische Linse. Der Ring ist senkrecht zur z -Achse orientiert (siehe Abb. 2).

Eine Quelle erzeugt nach Belieben Pakete nicht-relativistischer Elektronen. Die kinetische Energie dieser Elektronen ist $E = mv^2/2$ (v ist die Geschwindigkeit), sie verlassen die Quelle zu genau definierten Zeitpunkten. Das System ist so programmiert, dass der Ring meistens ungeladen ist, aber auf Ladung q geladen wird, wenn Elektronen weniger als $d/2$ ($d \ll R$) von der Ringebene entfernt sind (grauer Bereich in Abb. 2, "aktive Region" genannt). Nimm in Teil C an, dass Lade- und Entladevorgänge instantan passieren und dass das elektrische Feld auch instantan den Raum ausfüllt. Magnetfelder können vernachlässigt werden, die Geschwindigkeit der Elektronen in z -Richtung kann als konstant angenommen werden. Bewegte Elektronen beeinflussen die Ladungsverteilung auf dem Ring nicht.

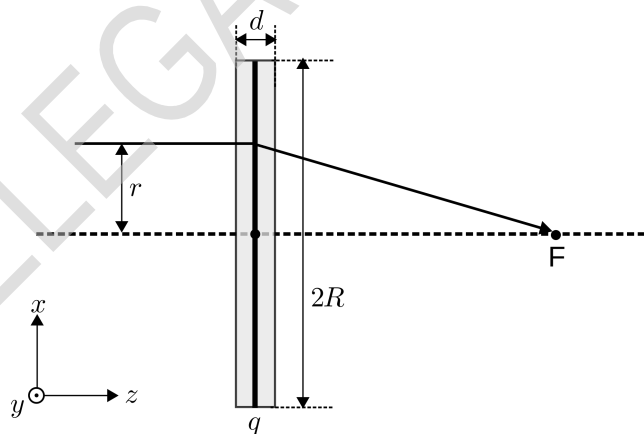


Abb. 2. Modell einer elektrostatischen Linse.

C.1 Bestimme die Brennweite f dieser Linse. Nimm an dass $f \gg d$. Drücke deine Antwort abhängig von der Konstante β aus Frage B.1 und anderer bekannter Größen aus. Nimm an, dass die Geschwindigkeit des Elektronenpakets vor Erreichen der "aktiven Region" parallel zur z -Achse ist und $r \ll R$. Das Vorzeichen von q wird so gewählt, dass die Linse fokussierend wirkt. 1.3pt

Tatsächlich liegt die Elektronenquelle auf der z -Achse in einer Entfernung $b > f$ von der Mitte des Rings. Betrachte, dass die Elektronen sich nicht mehr parallel zur z -Achse bewegen bis sie die "aktive Region" erreichen, sondern von einer Punktquelle in einem Winkelbereich $\gamma \ll 1$ rad zur z -Achse ausgesendet werden. Die Elektronen werden in einem Punkt im Abstand c von der Mitte des Rings fokussiert.

C.2 Bestimme c . Drücke die Antwort in Abhängigkeit der Konstante β aus Frage B.1 und anderer bekannter Größen aus. 0.8pt

C.3 Ist die Gleichung für eine dünne optische Linse 0.2pt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{f}$$

für die elektrostatische Linse erfüllt? Zeige dies explizit durch Berechnen von $1/b + 1/c$.

Teil D. Der Ring als Kondensator (3 Punkte).

Das oben betrachtete Modell ist idealisiert und es wurde angenommen, dass der Ring instantan geladen wird. Tatsächlich benötigt der Ladevorgang Zeit, da der Ring sich wie ein Kondensator mit endlicher Kapazität C verhält. In diesem Aufgabenteil werden die Eigenschaften dieses Kondensators analysiert. Die folgenden Integrale könnten nützlich sein:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln \left| \frac{\cos x + 1}{\sin x} \right| + \text{const}$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \text{const.}$$

D.1 Berechne die Kapazität C der Rings. Berücksichtige, dass der Ring eine endliche Breite $2a$ hat, aber dass $a \ll R$ gilt. 2.0pt

Wenn die Elektronen die "aktive Region" erreichen, wird der Ring mit einer Spannungsquelle der Spannung V_0 verbunden (Abb. 3). Wenn die Elektronen die "aktive Region" verlassen, wird der Ring mit Erdpotential verbunden. Der Widerstand der Anschlüsse ist R_0 und der Widerstand des Rings selbst kann vernachlässigt werden.

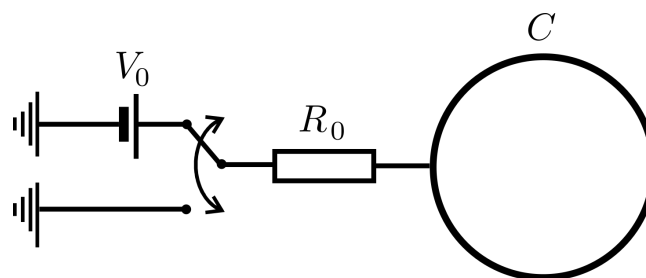


Abbildung 3. Laden der elektrostatischen Linse.



- D.2** Bestimme die zeitliche Abhängigkeit der Ladung auf dem Ring $q(t)$, und skizziere sie schematisch. $t = 0$ bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem die Elektronen die Ebene des Ringes durchqueren. Wie groß ist die Ladung auf dem Ring q_0 , wenn der Betrag von $q(t)$ sein Maximum erreicht? Die Kapazität des Ringes beträgt C (d.h. du musst nicht den in D.1 hergeleiteten Ausdruck verwenden). *Hinweis:* die eingezeichnete Polarität in Abb. 3 ist nur indikativ. Das Vorzeichen sollte so gewählt werden, dass die Linse fokussierend wirkt. 1.0pt

Teil E. Brennweite einer realistischeren Linse: nicht-instantanes Aufladen (2 Punkte)

In diesem Aufgabenteil wird die Funktion einer realistischeren Linse betrachtet. Wir werden die Dicke des Rings $2a$ wieder vernachlässigen und annehmen, dass die Elektronen sich parallel zur z -Achse bewegen bevor sie die "aktive Region" erreichen. Dafür ist der Ladevorgang des Ringes nicht mehr instantan.

- E.1** Bestimme die Brennweite f des Objektivs. Nimm an, dass $f/v \gg R_0 C$, aber d/v und $R_0 C$ von der gleichen Größenordnung sind. Drücke deine Antwort als Funktion der Konstante β aus Teil B und anderen bekannten Größen aus. 1.7pt
- E.2** Das Ergebnis für f ähnelt dem Ergebnis aus Teilaufgabe C, wobei der Wert q durch q_{eff} ersetzt wurde. Bestimme den Ausdruck für q_{eff} als Funktion in der Aufgabenstellung gegebener Größen. 0.3pt