Physik der Planeten

Dieses Problem besteht aus zwei unabhängigen Problemen, die sich auf das Innere der Planeten beziehen. Die Auswirkungen der Oberflächenkrümmung der Planeten können vernachlässigt werden. Du benötigst eventuell die Formel

$$(1+x)^{\varepsilon} \approx 1+\varepsilon x, \text{ when } |x| \ll 1. \quad (1)$$

Teil A. Mittelozeanischer Rücken (5.0 Punkte)

Betrachte ein großes Gefäß mit Wasser, das sich in einem gleichmäßigen Gravitationsfeld mit Fallbeschleunigung g befindet. Zwei senkrechte, zueinander parallele rechteckige Platten werden so in das Gefäß eingebaut, dass die senkrechten Kanten der Platten in engem, spaltfreiem Kontakt mit den senkrechten Wänden des Gefäßes stehen. Die Länge h jeder Platte ist in Wasser eingetaucht (Abb. 1). Die Breite der Platten entlang der y-Achse ist w, die Dichte von Wasser ist ρ_0 .

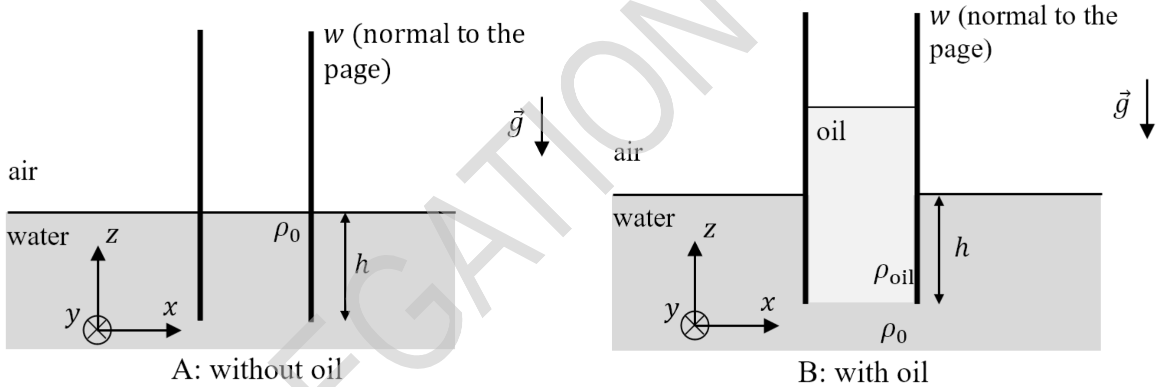

Abb. 1. Parallele Platten in Wasser.

Öl der Dichte ρ_{oil} ($\rho_{\text{oil}} < \rho_0$) wird in den Raum zwischen den Platten gegossen, bis der untere Füllstand des Öls die Unterkanten der Platten erreicht hat. Nimm an, dass die Platten und Behälterränder hoch genug sind, damit das Öl nicht überläuft. Oberflächenspannung und Mischung der Flüssigkeiten können vernachlässigt werden.

A.1	Wie groß ist die x-Komponente der Nettokraft F_x, die auf die rechte Platte ausgeübt wird (Betrag und Richtung)?	0.8pt

Abb. 2 zeigt einen Querschnitt eines mittelozeanischen Rückens. Er besteht aus sich überlagernden Schichten von Mantel, Kruste und Ozeanwasser. Der Mantel besteht aus Gesteinen, von denen wir annehmen, dass sie in geologischen Zeitskalen fließen können und daher in diesem Problem als Flüssigkeit behandelt werden. Die Dicke der Kruste ist viel kleiner als die charakteristische Längenskala in der x-Richtung, daher verhält sich die Kruste wie eine frei biegbare Platte. Mit hoher Genauigkeit kann ein solcher Grat als zweidimensionales System modelliert werden, ohne Variation der Variablen entlang der der y-Achse, die senkrecht zur Ebene von Abb. 2 ist. Nehme an, dass die Länge des Grats L entlang der y-Achse viel größer ist als jede andere Länge, die in diesem Problem eingeführt wird.

In der Mitte des Rückens wird die Dicke der Kruste als Null angenommen. Mit zunehmender horizontaler Entfernung x vom Zentrum wird die Kruste dicker und nähert sich einer konstanten Dicke D an, wenn $x \to \infty$. Entsprechend senkt sich der Ozeanboden um eine vertikale Höhe unterhalb der Spitze des Grates O, die wir als Ursprung unseres Koordinatensystems definieren (siehe Abb. 2). Wasserdichte ρ_0 and Temperatur T_0 können als konstant in Raum und Zeit angenommen werden. Dasselbe kann für die Dichte des Mantels ρ_1 and seine Temperatur T_1 angenommen werden. Die Temperatur T der Kruste ist ebenfalls zeitlich konstant, kann aber von der Position abhängen.

Es ist bekannt, dass sich das Material der Kruste mit einer hohen Genauigkeit linear mit der Temperatur T ausdehnt. Da die Wasser- und Manteltemperatur als konstant angenommen werden, ist es nützlich, die reskalierte Form des thermischen Ausdehnungskoeffizienten zu verwenden. Dabei ist $l(T) = l_1\left[1 - k_l(T_1 - T)/(T_1 - T_0)\right]$, wobei l die Länge eines Stücks Krustenmaterial ist, l_1 seine Länge bei Temperatur T_1, und k_l ist der reskalierte thermische Ausdehnungskoeffizient, der als konstant angenommen werden kann.

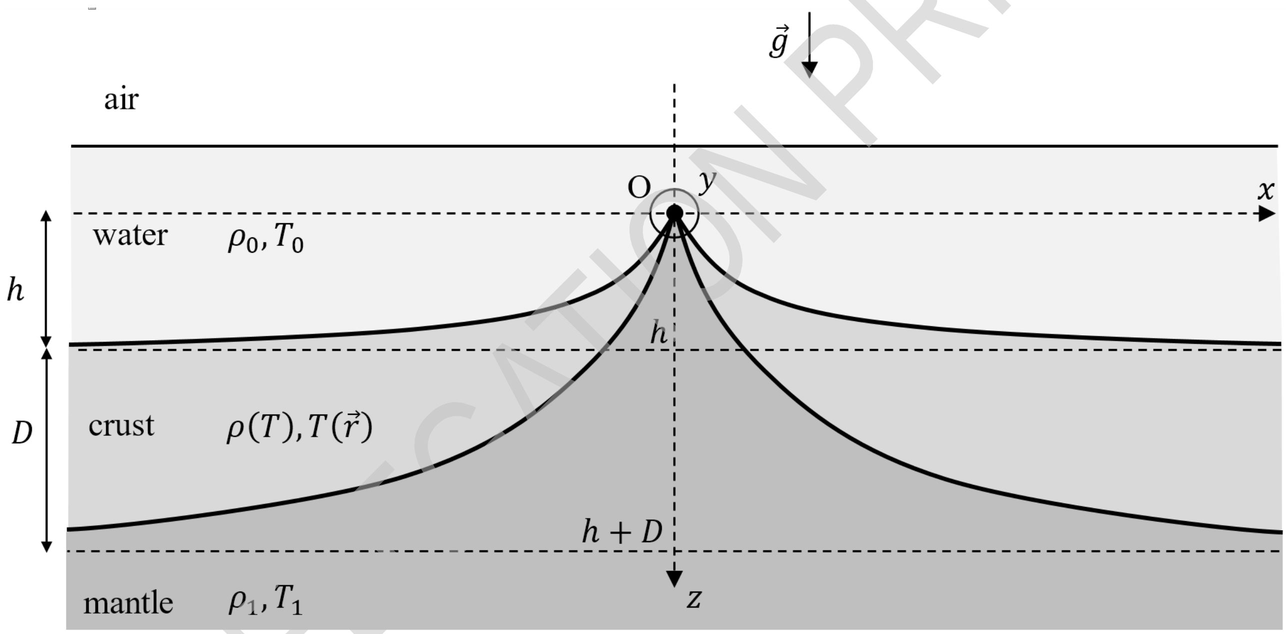

Abb. 2. Mittelozeanischer Rücken. Achtung: Die z-Achse zeigt hinunter.

A.2 Finde heraus, wie die Dichte der Kruste ρ von der Temperatur T abhängt unter der Annahme, dass die Kruste isotrop ist. Nimm an, dass $|k_l| \ll 1$, und schreibe deine Antwort in der Näherungsform **0.6pt**

$$\rho(T) \approx \rho_1 \left[1 + k\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}\right], \tag{2}$$

wo Terme der Ordnung k_l^2 und höher vernachlässigt werden. Bestimme danach die Konstante k.

Es ist bekannt, dass $k > 0$. Auch die Wärmeleitfähigkeit der Kruste kann als konstant angenommen werden. Daraus folgt, dass sehr weit von der Längsachse des mittelozeanischen Rückens entfernt die Temperatur der Kruste linear von der Tiefe abhängt.

A.3	Unter der Annahme, dass sich Mantel und Wasser jeweils wie eine inkompressible Flüssigkeit im hydrostatischen Gleichgewicht verhalten, drücke die Dicke D der Kruste in weiter Ferne durch h, ρ_0, ρ_1 und k aus. Jede Bewegung des Materials kann vernachlässigt werden.	1.1pt

A.4	Drücke, in Abhängigkeit der führenden Ordnung von k, die Nettokraft F, die auf die rechte Hälfte ($x > 0$) der Kruste wirkt, durch ρ_0, ρ_1, h, L, k und g aus.	1.6pt

Angenommen, die Kruste ist thermisch vom Rest der Erde isoliert. Infolge der Wärmeleitung werden sich die Temperaturen der oberen und unteren Oberfläche der Kruste einander annähern, bis die Kruste ein thermisches Gleichgewicht erreicht. Die spezifische Wärme der Kruste ist c und kann als konstant angenommen werden.

A.5	Schätze mit Hilfe der Dimensionsanalyse oder der Größenordnungsanalyse die charakteristische Zeit τ ab, in der die Differenz zwischen den oberen und unteren Oberflächentemperaturen der Kruste weit weg von der Längsachse des mittelozeanischen Rückens gegen Null gehen wird. Du kannst annehmen, dass τ nicht von den beiden anfänglichen Oberflächentemperaturen der Kruste abhängt.	0.9pt

Teil B. Seismische Wellen in geschichteten Medien (5.0 Punkte)

Angenommen, ein kurzes Erdbeben ereignet sich an der Oberfläche eines Planeten. Die seismischen Wellen können als von einer Linienquelle ausgehend angenommen werden, die sich bei $z = x = 0$ befindet, wobei x die horizontale Koordinate und z die Tiefe unter der Oberfläche ist (Abb. 3). Es kann angenommen werden, dass die Quelle der seismischen Wellen viel länger ist als alle anderen in dieser Frage betrachteten Längen.

Als Folge des Erdbebens wird ein gleichmäßiger Fluss der sogenannten longitudinalen P-Wellen entlang aller Richtungen in der x-z -Ebene abgestrahlt, die eine positive Komponente entlang der z-Achse haben. Da die Wellentheorie in einem Festkörper generell kompliziert ist, vernachlässigen wir in diesem Problem alle anderen Wellen, die durch das Erdbeben ausgesendet werden. Die Kruste des Planeten ist geschichtet, so dass die Geschwindigkeit v der P-Welle von der Tiefe z gemäß $v = v_0(1 + z/z_0)$ abhängt, wobei v_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche ist und z_0 eine bekannte positive Konstante ist.

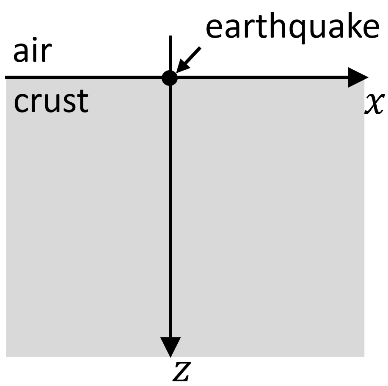

Abb. 3. Koordinatensystem, das in Teil B verwendet wird.

B.1	Betrachte einen einzelnen Strahl, der vom Erdbeben unter einem Winkel $0 < \theta_0 < \pi/2$ mit der z-Achse ausgesandt wird und sich in der x-z-Ebene bewegt. Wie lautet die horizontale Koordinate $x_1(\theta_0) \neq 0$, an der dieser Strahl an der Oberfläche des Planeten detektiert werden kann? Es ist bekannt, dass der Strahlengang ein Kreisbogen ist. Schreibe deine Antwort in der Form $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$, wobei A und b die Konstanten sind, die gefunden werden müssen.	1.5pt

Falls du A und b nicht finden konntest, kannst du in den folgenden Aufgaben das Ergebnis $x_1(\theta_0) = A\cot(b\theta_0)$ wie angegeben verwenden. Nimm an, dass die Gesamtenergie pro Länge der Quelle, die beim Erdbeben als P-Wellen in die Kruste gesendet werden, E beträgt. Nimm an, dass Wellen vollständig absorbiert werden, wenn sie die Oberfläche des Planeten von unten erreichen.

B.2	Stelle fest, wie die Energiedichte pro Flächeneinheit $\varepsilon(x)$, die von der Oberfläche absorbiert wird, vom Abstand x entlang der Oberfläche abhängt. Skizziere $\varepsilon(x)$.	1.5pt

Nimm nun an, dass die Wellen stattdessen vollständig reflektiert werden, wenn sie die Oberfläche erreichen. Stelle dir ein Gerät bei $z = x = 0$ vor, das die gleiche Geometrie hat wie die zuvor betrachtete Erdbebenquelle. Das Gerät ist in der Lage, P-Wellen in einer frei gewählten Winkelverteilung auszusenden. Wir lassen das Gerät ein Signal mit einem engen Bereich von Winkeln Wellen emittieren. Insbesondere ist der Anfangswinkel, den das Signal mit der Vertikalen einnimmt, aus dem Intervall $[\theta_0 - \frac{1}{2}\delta\theta_0, \theta_0 + \frac{1}{2}\delta\theta_0]$, wobei $0 < \theta_0 < \pi/2$, $\delta\theta_0 \ll 1$ und $\delta\theta_0 \ll \theta_0$ sind.

B.3	In welchem Abstand x_{max} entlang der Oberfläche von der Quelle ist der weiteste Punkt, den das Signal nicht erreicht? Drücke deine Antwort in Abhängigkeit von θ_0, $\delta\theta_0$ und anderen, oben angegebenen, Konstanten aus.	2.0pt