Null-Längen-Feder und Slinky-Feder

Eine Null-Längen-Feder (NLF = Zero-length spring) ist eine Feder, für welche die Kraft proportional zur Federlänge ist: $F = kL$ für $L > L_0$, wobei L_0 die Minimallänge der Feder und damit auch die Länge im ungedehnten Zustand ist. Abbildung 1 zeigt den Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Federlänge L einer NLF, wobei der Anstieg der Geraden die Federkonstante k ist.

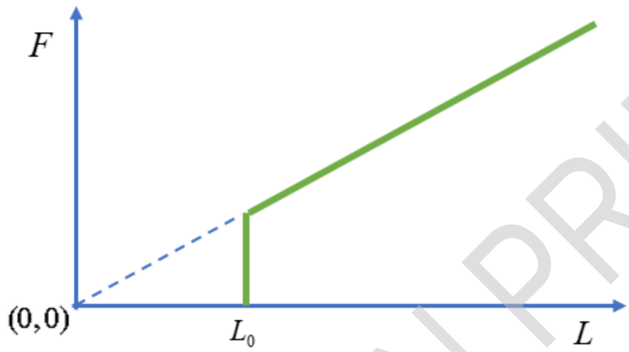

Abbildung 1: Der Zusammenhang zwischen Kraft F und Federlänge L

Eine NLF findet Verwendung in der Seismographie und erlaubt eine sehr genaue Messung von Veränderungen der Gravitationsbeschleunigung g. In diesem Fall betrachten wir eine homogene NLF, deren Gewicht Mg größer als kL_0 ist. Wir definieren ein entsprechendes dimensionsloses Verhältnis $\alpha = kL_0/Mg < 1$, welches die relative Weichkeit (bzw. den Härtegrad) der Feder charakterisiert. Das Spielzeug „Slinky" könnte (aber muss nicht) eine solche NLF sein.

Teil A: Statik (3,0 Punkte)

A.1	Gehe von einem Segment $\Delta\ell$ der ungedehnten NLF aus , welches dann von der Kraft F unter schwerelosen Verhältnissen gedehnt wird. Gib die Länge Δy dieses gedehnten Segments in Abhängigkeit von F, $\Delta\ell$ und den Parametern der Feder an.	0.5pt

A.2	Berechne für ein Segment der Länge $\Delta\ell$ der NLF die Arbeit ΔW, welche erforderlich ist um das Segment von der ursprünglichen Länge $\Delta\ell$ auf die Länge Δy zu dehnen.	0.5pt

Im Folgenden kennzeichnen wir einen Punkt auf der Feder durch seinen Abstand $0 \leq \ell \leq L_0$ vom unteren Ende der Feder im ungedehnten Zustand. Für jeden Punkt auf der Feder bleibt ℓ unverändert während die Feder gedehnt wird.

A.3	Angenommen wir hängen die Feder an ihrem oberen Ende auf, sodass sie durch ihr eigenes Gewicht gedehnt wird. Wie groß ist die Gesamtlänge H der hängenden Feder im Gleichgewicht? Gib die Antwort in Abhängigkeit von L_0 und α an.	2.0pt

Teil B: Dynamik (5,5 Punkte)

Experimente haben gezeigt, dass wenn eine Feder in Ruhe hängt und dann (am oberen Ende) losgelassen wird, sich diese sukzessiv von oben her kontrahiert, während der untere Teil stationär bleibt (siehe

Abbildung 2). Mit fortschreitender Zeit bewegt sich der kontrahierte Teil als ein festes Stück und wird durch zusätzliche Windungen der Feder länger, während der stationäre Teil kürzer wird.

Jeder Punkt der Feder beginnt sich erst dann zu bewegen, wenn er von dem sich bewegenden Teil der Feder erreicht wird. Das untere Ende der Feder beginnt sich erst dann zu bewegen, wenn sich die Feder komplett kontrahiert hat und die Länge L_0 des ungedehnten Zustandes erreicht hat.

Erst danach beginnt die kontrahierte Feder wie ein starrer Körper, ohne zu rotieren, unter dem Einfluss von Gravitation gerade nach unten zu fallen .

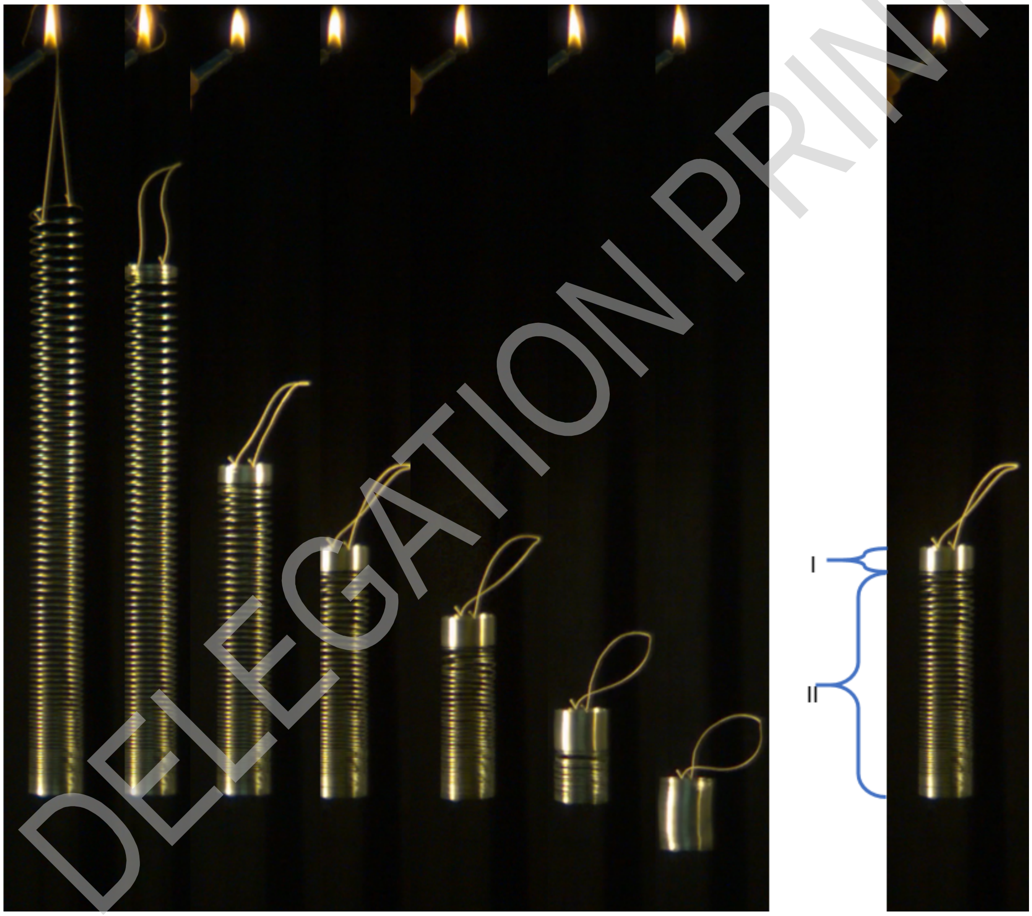

Abbildung 2: Links: Eine Bildfolge aufgenommen während des freien Falls einer Slinky-Feder. Rechts: Der sich bewegende Teil I und der stationäre Teil II während des freien Falls der Feder.

Für den verbleibenden Teil der Frage ist die Lösung auf dem soeben beschriebenen Modell aufzubauen.

Der Luftwiderstand darf vernachlässigt werden, nicht jedoch L_0.

B.1	Berechne die Zeit t_c, die die Feder benötigt, um vom Moment des Loslassens vollständig zu ihrer Minimallänge L_0 zu kontrahieren. Gib die Antwort in Abhängigkeit von L_0, g und α an. Berechne den nummerischen Wert von t_c für eine Feder mit $k = 1{,}02\ \mathrm{N/m}$, $L_0 = 0{,}055\ \mathrm{m}$ und $M = 0{,}201\ \mathrm{kg}$. Nimm g mit $9{,}80\ \mathrm{m/s^2}$ an.	2.5pt

B.2	In dieser Aufgabe wird ℓ verwendet, um die Koordinate der Grenze zwischen den Teilen I (in Abbildung 2, der sich bewegende Teil) und II (der stationäre Teil) zu kennzeichnen. Zu einem bestimmten Zeitpunkt, zu dem noch ein stationärer Teil existiert, beträgt seine Masse $m(\ell) = \frac{\ell}{L_0}M$, und der sich bewegende Teil bewegt sich mit gleichbleibender Momentangeschwindigkeit $v_I(\ell)$. Zeige, dass zu diesem Zeitpunkt (während es noch einen sich bewegenden Teil gibt) die Geschwindigkeit des sich bewegenden Teils $v_I(\ell) = \sqrt{A\ell + B}$ beträgt. Gib die Konstanten A und B in Abhängigkeit von L_0, g und α an.	2.5pt

B.3	Verwende das Ergebnis von B.2 und bestimme die Minimalgeschwindigkeit $v_{\min}$ des sich bewegenden Teils der Feder im Laufe seiner Bewegung nach dem Loslassen und vor dem Auftreffen auf den Boden. Gib die Antwort in Abhängigkeit von L_0, α, A und B an.	0.5pt

Teil C: Energie (1,5 Punkte)

C.1	Berechne die mechanische Energiemenge Q, die durch Wärme vom Moment des Loslassen der Feder bis unmittelbar vor Auftreffen auf dem Boden verloren gegangen ist. Gib die Antwort in Abhängigkeit von L_0, M, g und α an.	1.5pt