

LIGO-GW150914 (10 Punkte)

Am Gravitationswellen-Observatorium LIGO wurden im Jahre 2015 zum allerersten Mal Gravitationswellen (**GW**) auf ihrem Weg durch die Erde nachgewiesen. Dieses Ereignis mit der Kennzeichnung GW150914 wurde durch Wellen ausgelöst, die von zwei Schwarzen Löchern ausgingen, die sich auf nahezu kreisförmigen Bahnen befanden. Diese Aufgabe erlaubt es, aus den Eigenschaften des beobachteten Signals eine Reihe von physikalischen Größen dieses Systems abzuschätzen.

Teil A: Newtonsche (energieerhaltende) Umlaufbahnen (3.0 Punkte)

- A.1** Betrachte ein System aus zwei Sternen der Massen M_1 , M_2 und den Positionen $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ relativ zum Schwerpunktsystem, d.h. 1.0pt

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Betrachte die Sterne als vom Rest des Universums isoliert und ihre Geschwindigkeit als nicht-relativistisch. Gemäß der Newtonschen Gesetze kann der Beschleunigungsvektor der Masse M_1 ausgedrückt werden als

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

wobei $r_1 = |\vec{r}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$.

Bestimme $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$.

G ist die Newtonsche Gravitationskonstante [$G \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$].

- A.2** Die Gesamtenergie dieses Systems aus zwei Massen kann bei Kreisbahnen ausgedrückt werden als: 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}. \quad (3)$$

Dabei sind

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad M \equiv M_1 + M_2, \quad (4)$$

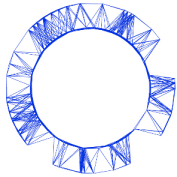
die *reduzierte Masse* und die *totale Masse* des Systems, Ω die Winkelgeschwindigkeit jeder der beiden Massen und L der Gesamtabstand $L = r_1 + r_2$.

Bestimme eine explizite Form des Ausdrucks $A(\mu, \Omega, L)$.

- A.3** Gleichung (3) kann vereinfacht werden zu $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$. 1.0pt
Bestimme den Wert der Zahl β .

Teil B - Einführung relativistischer Energieverluste (7.0 Punkte)

Eine korrekte Theorie für die Gravitationswechselwirkung, die Allgemeine Relativitätstheorie, wurde von Einstein im Jahre 1915 beschrieben und sagte vorher, dass die Gravitation sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Die Austauschteilchen, die die Information über die Wechselwirkung übertragen, werden GW genannt. GW werden immer dann ausgesandt, wenn eine Masse beschleunigt wird, wodurch das System Energie verliert.



Betrachte ein System zweier punktförmiger Teilchen, die vom Rest des Universums isoliert sind. Einstein hat für bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit ausgesandte GW gezeigt, dass 1) ihre Frequenz doppelt so hoch ist wie die Umlauffrequenz; 2) sie durch eine Luminosität beschrieben werden können, d. h. einer abgestrahlten Leistung $\mathcal{P}$, welche von der Einsteinschen Quadrupolformel dominiert wird:

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit mit $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Für ein System zweier punktförmiger Teilchen in einer Umlaufbahn in der $x-y$ -Ebene sind die Komponenten Q_{ij} in der folgenden Tabelle beschrieben (i, j entsprechen der Zeile beziehungsweise der Spalte)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A, \quad (7)$$

und $Q_{ij} = 0$ für alle anderen Kombinationen. Dabei beschreibt (x_A, y_B) den Ort der Masse A im Schwerpunktsystem.

- B.1** Für die in **A.2** beschriebenen kreisförmigen Bahnen kann man die Komponenten Q_{ij} ausdrücken als Funktion der Zeit t : 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

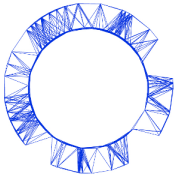
Bestimme k als Funktion von Ω und den numerischen Werten der Konstanten a_i, b_i, c_{ij} .

- B.2** Berechne die Leistung $\mathcal{P}$ der von diesem System ausgesandten Gravitationswellen und bestimme: 1.0pt

$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Berechne den Wert der Zahl ξ !

[Falls du ξ nicht bestimmen konntest, verwende im Folgenden $\xi = 6,4$.]



- B.3** Ohne Aussendung von Gravitationswellen würden die beiden Massen unendlich lange auf einer festen Kreisbahn umeinander kreisen. Die Aussendung von Gravitationswellen jedoch führt dazu, dass das System Energie verliert und damit der Radius der Kreisbahn langsam abnimmt. Zeige, dass die Änderungsrate $\frac{d\Omega}{dt}$ der orbitalen Winkelgeschwindigkeit die folgende Form annimmt: 1.0pt

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

Dabei ist M_c die sogenannte *Chirp-Masse*.

Bestimme M_c als Funktion von M und μ .

Diese Masse bestimmt das Anwachsen der Frequenz bei der Verkleinerung der Kreisbahn. [Mit "Chirp" ("Zwitschern") wird in der Signalverarbeitung ein Signal bezeichnet, dessen Frequenz sich zeitlich ändert.]

- B.4** Benutze die oben bereitgestellte Information, um die Relation der Winkelgeschwindigkeit Ω mit der Frequenz f_{GW} der Gravitationswellen zu erhalten. Für eine beliebige glatte Funktion $F(t)$ und $a \neq 1$ gilt: 2.0pt

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0). \quad (11)$$

Dabei ist χ eine Konstante und t_0 eine Integrationskonstante.

Zeige, dass aus Gleichung (10) für die Frequenz der Gravitationswelle folgt:

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p} \quad (12)$$

und bestimme die Konstante p .

Am 14. September 2015 wurde GW150914 von den LIGO-Detektoren registriert, die aus zwei je 4 km langen Armen bestehen, die ein L bilden. Dabei änderten sich die relativen Längen der Detektorarme gemäß Abbildung 1. Die Detektorarme reagieren linear auf den Durchlauf einer Gravitationswelle, und das Reaktionsmuster entspricht einer Darstellung der Welle. Diese Welle wurde von zwei schwarzen Löchern erzeugt, die sich annähernd auf einer Kreisbahn befanden; der Energieverlust aufgrund der Gravitationsstrahlung ließ deren Radius schrumpfen, was schließlich zur Kollision der schwarzen Löcher führte. Der Kollisionspunkt entspricht in etwa der Spitze des Signals nach dem Punkt D in Abbildung 1.

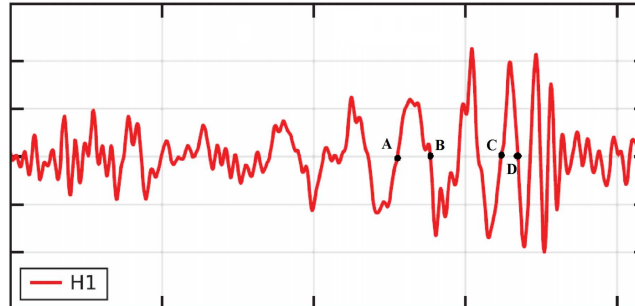
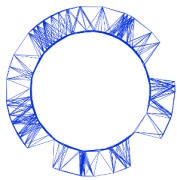


Abbildung 1. Dehnung, d.h. die relative Längenänderung der beiden Arme des LIGO-Detektors H1. Die horizontale Achse stellt die Zeit dar, und die Punkte A, B, C und D entsprechen $t = 0,000; 0,009; 0,034; 0,040$ s.

B.5 Bestimme aus der Abbildung eine Abschätzung von $f_{\text{GW}}(t)$ für

1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{and} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Bestimme unter der Annahme, dass Gleichung (12) für die ganze Zeit bis zur Kollision gültig ist (was strenggenommen nicht stimmt) und dass beide Objekte die gleiche Masse haben, eine Abschätzung für die Chirp-Masse und die Gesamtmasse des Systems in Vielfachen der Sonnenmasse $M_{\odot} \simeq 2 \cdot 10^{30}$ kg.

B.6 Bestimme eine Abschätzung des minimalen orbitalen Abstandes L_{col} der beiden Objekte zur Zeit $t_{\overline{CD}}$. Leite daraus eine Abschätzung der maximalen Größe R_{max} beider Objekte ab. Bestimme $R_{\odot}/R_{\text{max}}$ als Vergleich dieser Größe mit dem Radius unserer Sonne $R_{\odot} \simeq 7 \cdot 10^5$ km. Schätze auch ihre lineare Geschwindigkeit v_{col} im Orbit ab, und vergleiche sie mit der Lichtgeschwindigkeit: v_{col}/c .

1.0pt

Wie du sehen wirst, handelt es sich um extrem schnelle und extrem kompakte Objekte!