

Viskoelastizität eines Polymerfadens (10 Punkte)

Bitte achte darauf, den Faden nicht vor dem Beginn des Experiments zu belasten!

Schalte die Waage jetzt sofort ein (die Aufwärmzeit beträgt etwa 10 Minuten). Verändere die Einstellungen der Waage nicht.

Einleitung

Wenn ein Festkörper einer äußeren Kraft ausgesetzt ist, so verformt er sich. Bei hinreichend kleiner Kraft ist diese Verformung proportional zur Kraft (Hookesches Gesetz) und reversibel, sodass der Körper seine Ursprungsform wieder annimmt, sobald die Krafteinwirkung aufhört.

Für einen Festkörper lässt sich dieser Effekt gut durch das Konzept von Spannung und Dehnung beschreiben. Die Spannung σ ist definiert als die Kraft pro Flächeneinheit, das ist die Kraft F dividiert durch die Fläche S , auf die sie einwirkt. Die Dehnung ϵ ist die relative Längenänderung:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{and} \quad \epsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}, \quad (1)$$

Dabei ist ℓ die gedehnte und ℓ_0 die ursprüngliche Länge. Im einfachen elastischen Fall ist die Dehnung proportional zur Spannung $\sigma = E \epsilon$ (Hookesches Gesetz), und der Proportionalitätsfaktor E wird *Elastizitätsmodul* genannt.

Die Beschreibung des elastischen Verhaltens durch das Hookesche Gesetz ist eine Näherung, die nur für hinreichend kleine Spannungen gültig ist. Für höhere Spannungen wird die Dehnung zunehmend irreversibel und es kommt zu einer plastischen Verformung. Dabei beginnen die Moleküle sich frei zu bewegen, wie in einer zähen Flüssigkeit. Dies bedeutet, dass das Material, wenn es über die elastische Grenze hinaus gedehnt oder komprimiert wird, nahezu flüssig wird.

Viskoelastische Stoffe

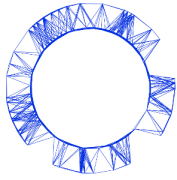
Bestimmte Stoffe vereinigen Aspekte eines elastischen Festkörpers mit Eigenschaften einer zähen Flüssigkeit und werden daher *viskoelastische* Stoffe genannt.

Beim Umgang mit viskoelastischen Stoffen ist es sinnvoll, das rein elastische Verhalten und das zusätzliche viskose Verhalten getrennt zu betrachten. Die Gesamtspannung σ , die eine gegebene Dehnung ϵ verursacht, ist damit die Summe eines rein elastischen Terms $\sigma_0 = E_0 \epsilon_0$ und eines viskoelastischen Terms σ_1 :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \quad (2)$$

Beide Spannungsterme werden zur selben Dehnung gehörig erachtet ($\epsilon = \epsilon_0 = \epsilon_1$). Die Dehnung ϵ_1 jedoch, die dem viskoelastischen Term entspricht, wird normalerweise als Summe ausgedrückt aus der rein elastischen Dehnung $\epsilon_1^e = \sigma_1 / E_1$ und einer rein viskosen Dehnung ϵ_1^v (die beide durch dieselbe Spannung $\sigma_1 = \sigma_1^e = \sigma_1^v$ verursacht werden):

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^e + \epsilon_1^v \quad (3)$$



Im rein viskosen Prozess wird eine lineare Beziehung zwischen der Spannung und der zeitlichen Änderung der Dehnung angenommen (vergleichbar zum Verhalten zäher Flüssigkeiten):

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{d\epsilon_1^v}{dt}.$$

Dabei ist η_1 der Viskositätskoeffizient.

Dieses phänomenologische Modell wird *Standard Linear Solid Model (SLS-Modell)* oder *Zener-Modell* genannt und ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Federn repräsentieren die rein elastischen Komponenten und das Gefäß die rein viskose Komponente.

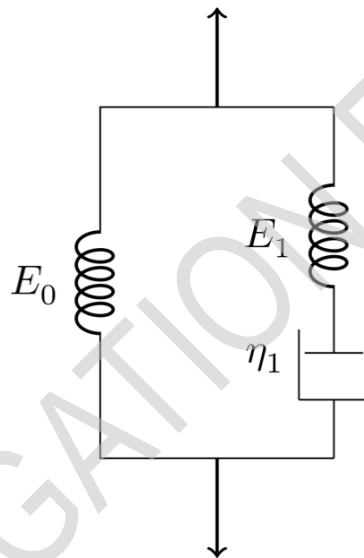


Abbildung 1. SLS-Modell der linearen Viskoelastizität.

Aus den obigen Gleichungen kann man die folgende Beziehung ableiten:

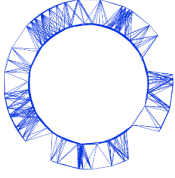
$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{1}{E_1} \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (4)$$

Damit kann man für den Fall des SLS-Modells der linearen Viskoelastizität zeigen, dass

$$\sigma = E_0 \epsilon + \tau_1 (E_0 + E_1) \frac{d\epsilon}{dt} - \tau_1 \frac{d\sigma}{dt}. \quad (5)$$

Dabei ist $\tau_1 = \eta_1 / E_1$. Diese Differenzialgleichung zeigt, dass die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung nicht mehr linear ist und dass sowohl die Spannung als auch die Dehnung jeweils zeitabhängige Funktionen sind. Um $\epsilon(t)$ zu erhalten, muss man die Funktion $\sigma(t)$ kennen und umgekehrt.

Es gibt zwei Spezialfälle von allgemeinem Interesse, bei denen entweder $d\epsilon/dt = 0$ ("Spannungsrelaxation") oder $d\sigma/dt = 0$ ("Kriechen") gilt. Im Fall der Spannungsrelaxation erfährt der Körper eine plötzliche



Dehnung, die über die Zeit konstant bleibt, sodass $d\epsilon/dt = 0$ ist. In diesem Fall hängt dann die Funktion $\sigma(t)$ nur von den viskoelastischen Parametern des Materials ab, und die Lösung von Gleichung (5) ist

$$\sigma(t) = \epsilon(E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1}). \quad (6)$$

Dabei wird angenommen, dass bei $t = 0$ nur die elastischen Komponenten zur Spannung beitragen und damit

$\sigma(t = 0) = \epsilon(E_0 + E_1)$. Diese Lösung zeigt, dass die viskoelastische Spannung exponentiell mit der Zeit abnimmt, mit einer Zeitkonstante τ_1 .

Multi-viskoelastische Prozesse

Das SLS-Modell kann leicht auf mehrere viskoelastische Prozesse erweitert werden, wie in Abbildung 2 dargestellt:

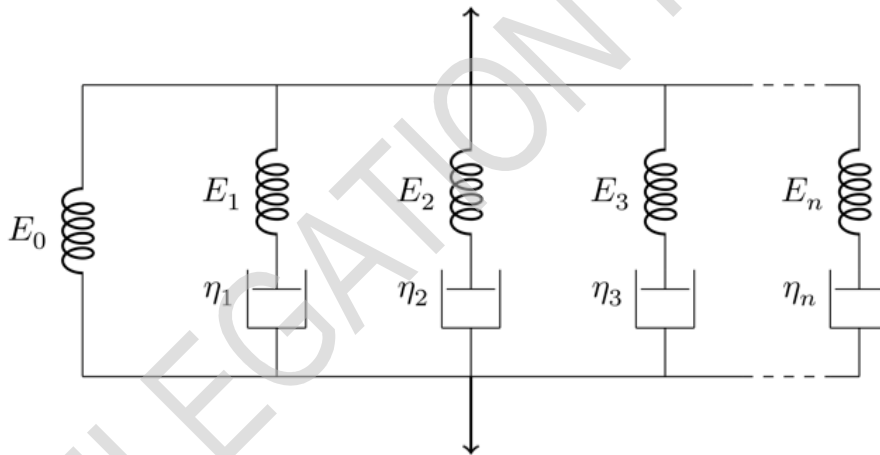


Abbildung 2. Verallgemeinertes Modell für multi-viskoelastische Prozesse.

Bei der Betrachtung von N verschiedenen viskoelastischen Komponenten erhält man:

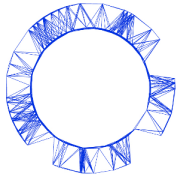
$$\sigma = \sigma_0 + \sum_k \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Dabei ist $\frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{1}{E_k} \frac{d\sigma_k}{dt} + \frac{\sigma_k}{\eta_k}$, und wie oben $\frac{d\epsilon_0}{dt} = \frac{d\epsilon_k}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt}$.

Damit ist die folgende Verallgemeinerung von Gleichung (5) anwendbar:

$$\sigma = E_0 \epsilon + \eta_t \frac{d\epsilon}{dt} - \sum_k \tau_k \frac{d\sigma_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

Dabei ist $\eta_t = \sum_k \eta_k$ und $\tau_k = \eta_k / E_k$.



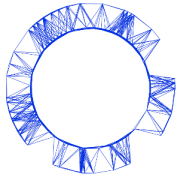
Im Falle einer konstanten Dehnung sollten die verschiedenen Komponenten der Spannung weiterhin exponentiell mit der Zeit abnehmen, $\sigma_k = A_k e^{-t/\tau_k}$, was zur folgenden Lösung führt:

$$\sigma(t) = \epsilon \left(E_0 + \sum_k E_k e^{-t/\tau_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

Dabei wird angenommen, dass bei $t = 0$ nur die elastischen Komponenten zur Spannung beitragen und damit $\sigma_0 = \epsilon(E_0 + \sum_k E_k)$. Die resultierende viskoelastische Reaktion ist offensichtlich nicht-linear.

DELEGATION PRINT

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-5

Austrian German (Austria)

Equipment

Die Ausrüstung für dieses Experiment enthält die folgenden Gegenstände (siehe Abbildung 3):

1. 1 Stativ, mit einer Befestigung unten für einen Laserpointer und weiter oben für den Faden, der mit konstanter Kraft senkrecht nach unten gedehnt wird, oberhalb der Waage;
2. 1 Probekörper, bestehend aus einer hohlen zylindrischen Masse und einer Befestigungsschraube für den Faden;
3. 1 langer thermoplastischer Polyurethanfaden (TPU), der sowohl an der Masse befestigt ist als auch an einer weiteren Halteschraube, um ihn damit an der oberen Befestigung des Stativs aufzuhängen;
4. 1 kurzer TPU-Faden, der an einer einzelnen Schraube befestigt ist;
5. 1 Laserpointer mit zugehöriger Halter;
6. 1 Digitalwaage;
7. 2 ebene Spiegel;
8. 1 Stoppuhr;
9. 1 Lineal;
10. 1 Rollmaßband;
11. 1 A4-Blatt zur Verwendung als Bildschirm;
12. 1 Klemmfeder, um den Laser zu fixieren und einzuschalten.

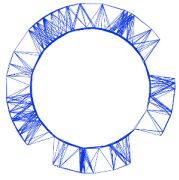
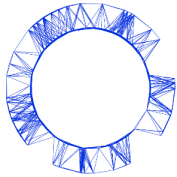


Abbildung 3. Experimentelle Ausrüstung.



Teil A: Messungen zur Spannungsrelaxation (1.9 Punkte)

Bitte achte darauf, den Faden nicht vor dem Beginn des Experiments zu belasten! Solltest du den Faden aus Versehen belastet haben, so bitte um einen neuen. Bedenke aber, dass dies etwas Zeit kostet, die du zur Durchführung des Experiments weniger hast. Bevor du das Experiment starten, solltest du vorher zur richtigen Planung der Messungen sorgfältig die Anleitung im "Teil D: Datenauswertung" lesen.

A.1 Miss die Länge des ungedehnten Fadens zwischen den Schraubenköpfen. Um die korrekte Gesamtlänge ℓ_0 des Fadens zu erhalten, einschließlich des Teils innerhalb der Schrauben, addiere 5 mm für jede der beiden Schrauben. Notiere auf dem Antwortblatt den gemessenen Wert von ℓ_0 und seine Messunsicherheit. 0.3pt

A.2 Miss das Gesamtgewicht P_0 des Probekörpers in "gram-force (gf) Einheiten". Dabei ist 1 "gram-force" ist die Gewichtskraft einer Masse von 1 Gramm ($1 \text{ gf} = 9,80 \cdot 10^{-3} \text{ N}$). Notiere auf dem Antwortblatt den gemessenen Wert und eine Abschätzung der Messunsicherheit. 0.3pt

Um die einzelnen Relaxationskomponenten zu beobachten ist es nötig, die Spannung lange genug auszuüben. Für diesen Fall reicht es aus, die Spannung etwa **45 Minuten** lang aufzuzeichnen.

Im Anschluss musst du zwei Aktionen 1 und 2 gleichzeitig durchführen. Bitte lies sorgfältig die Anleitung, bevor du anfängst.

Wichtiger Hinweis: Sollte das Experiment aus irgendeinem Grund unterbrochen werden, so ist es unmöglich, es wiederaufzunehmen. Der ganze Versuch muss dann mit einem neuen Faden wiederholt werden. Sollte dieser Fall eintreten, bitte um einen neuen Faden.

Führe die folgenden beiden Aktionen gleichzeitig aus:

1. Während die Masse auf der Waagenoberfläche verbleibt, dehne den Faden so weit, bis die Halteschraube am gegenüberliegenden Ende in der oberen Halterung des Stativs hängt (Abbildung 4).
2. Starte die Stoppuhr gleichzeitig mit Aktion 1.

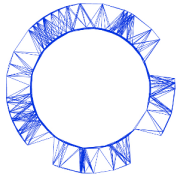


Abbildung 4. Aufhängen des Fadens in die obere Halterung und Start der Messungen.

- | | | |
|------------|--|-------|
| A.3 | Miss die Anzeigenwerte $P(t)$ der Waage und den entsprechenden Zeitpunkt t während ungefähr 45 Minuten und notiere sie in der dafür vorgesehenen Tabelle auf dem Antwortblatt. | 1.0pt |
| A.4 | Miss die Länge ℓ des gedehnten Fadens und schätze die dazugehörige Messunsicherheit ab. Notiere beides auf dem Antwortblatt. | 0.3pt |

Teil B: Messung des Durchmessers des gedehnten Fadens (1.5 Punkte)

Schaue niemals direkt in den Laser! Wenn er nicht gebraucht wird, sollte der Laserpointer ausgeschaltet sein. Wenn du Schwierigkeiten hast, ein Beugungsmuster zu erhalten, bitte um einen neuen Laser.

In diesem Teil wirst du den Durchmesser des TPU-Fadens mit Hilfe der Lichtbeugung messen. Der nominelle Durchmesser des nicht-gedehnten Fadens beträgt 0,5 mm. Wie du vielleicht weißt, ist das Beugungsmuster eines rechteckigen Spaltes der Breite d ähnlich dem eines zylinderförmigen Objektes desselben Durchmessers d wie die Spaltbreite. Im Fernfeldbereich (Fraunhofer-Region), bei dem das Beugungsmuster auf einer Leinwand beobachtet wird, deren Entfernung vom Objekt viel größer ist als dessen Durchmesser, ist die Distanz zwischen den Beugungsminima für kleine Winkel für einen Spalt und diesem Objekt gleich und gegeben durch

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

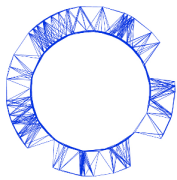
Dabei ist θ der Beugungswinkel.

Das Licht des Laserpointers hat eine Wellenlänge von $\lambda = 650 \pm 10 \text{ nm}$.

Zur Durchführung dieses Teils gehen Sie wie folgt vor:

1. Schalte den Laser mit Hilfe der Klemmfeder ein (siehe Abbildung 5).

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-9

Austrian German (Austria)

2. Positioniere den Laser so, dass sein Licht direkt auf den gedehnten Faden trifft.
3. Entwirf mit Hilfe des zur Verfügung gestellten Materials eine Methode, um das Beugungsmuster auf die Papierleinwand zu projizieren und die Daten zu erhalten, mit denen du über Gleichung (10) den Fadendurchmesser bestimmen kannst.



Abbildung 5. Einschalten des Lasers mit Hilfe der Klemmfeder.

B.1	Fertige auf dem Antwortblatt eine Skizze deiner Methode an.	0.6pt
B.2	Miss den optischen Abstand D zwischen dem Faden und dem projizierten Beugungsmuster und notiere ihn zusammen mit einer Abschätzung der dazugehörigen Messunsicherheit auf dem Antwortblatt.	0.3pt
B.3	Bestimme den mittleren Abstand $\bar{x}$ zwischen den Beugungsminima und seine Messunsicherheit. Notiere beides auf dem Antwortblatt.	0.3pt
B.4	Wende Gleichung (10) auf ihre Beugungsdaten an und bestimme damit den Durchmesser d des gedehnten Polymerfadens und seine Messunsicherheit. Notiere beides auf dem Antwortblatt.	0.3pt

Part C: Wechsel zu einem neuen Faden (0.3 points)

Bevor du mit der Datenauswertung fortfährst (**Teil D**), musst du den Messaufbau für den kürzeren Faden vorbereiten (**Teil E**).

Entferne den Probekörper von dem langen Faden (durch Abschrauben) und bringe ihn an das frei Ende des kürzeren Fadens an. Führe den Faden dazu durch das Loch und befestige ihn mit der Halteschraube, siehe Abbildung 6.

Wenn es dir nicht gelingt, den Faden durch das Loch zu fädeln, bitte um Hilfe.

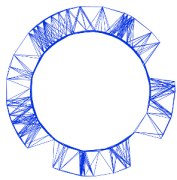


Abbildung 6. Befestigung des TPU-Fadens auf der Halteschraube.

- | | | |
|------------|---|-------|
| C.1 | Miss die Länge ℓ'_0 des Fadens wie in A.1 , und notiere sie zusammen mit einer Abschätzung der dazugehörigen Messunsicherheit auf dem Antwortblatt. | 0.3pt |
|------------|---|-------|

Hänge den Faden an die obere Befestigung am Ständer, sodass die Masse eine konstante Spannung ausübt. Der Faden wird schließlich seine stationäre Ausdehnung $\epsilon = \sigma/E$ annehmen, während du an der Datenauswertung arbeitest (**er sollte mindestens 30 Minuten hängen bleiben**).

Part D: Data analysis (5.7 points)

N.B.: Die Erdbeschleunigung in Lissabon beträgt $g = 9,80 \text{ ms}^{-2}$.

- | | | |
|------------|--|-------|
| D.1 | Berechnen Sie die auf den Faden wirkende Kraft F in gf für alle Datenpunkte und füllen Sie die entsprechende Spalte der in A.3 verwendeten Tabelle aus. | 0.3pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| D.2 | Stelle $F(t)$ grafisch auf dem Millimeterpapier am Antwortblatt dar. | 0.4pt |
|------------|--|-------|

Da die Waagenplattform nicht bewegt wird, kann man diese Messung als unter konstanter Dehnung durchgeführt betrachten, und Gleichung (9) findet Anwendung. Das Verhältnis $\frac{\sigma}{\epsilon}$ kann man ausdrücken als $\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F$ mit einer Konstante β . Damit ergibt sich:

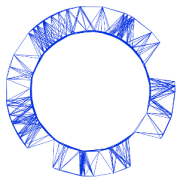
$$\frac{\sigma}{\epsilon} = \beta F(t) = E_0 + E_1 e^{-t/\tau_1} + E_2 e^{-t/\tau_2} + E_3 e^{-t/\tau_3} + \dots \quad (11)$$

Dabei sind aus Gründen der Übersichtlichkeit die Terme so angeordnet, dass gilt: $(\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \dots)$

- | | | |
|------------|---|-------|
| D.3 | Bestimme die konstante Dehnung ϵ und die dazugehörige Messunsicherheit. Notiere beides auf dem Antwortblatt. | 0.3pt |
|------------|---|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| D.4 | Berechne den Faktor β unter Verwendung von SI-Einheiten für σ und der Einheit gf für F , und notiere ihn auf dem Antwortblatt (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich). | 0.3pt |
|------------|--|-------|

- | | | |
|------------|--|-------|
| D.5 | Betrachte den Graphen aus D.2 : Er kann nicht durch einen rein elastischen Prozess erklärt werden. Skizziere qualitativ auf dem Millimeterpapier des Antwortblattes, was du für $F(t)$ im rein elastischen Fall erwarten würdest. | 0.4pt |
|------------|--|-------|



Es vereinfacht die Datenauswertung, wenn wir $\frac{dF}{dt}$ an Stelle von $F(t)$ betrachten. Dies bedeutet, dass die Relaxationsparameter dann in sukzessiven Schritten von Hand bestimmt werden können. Um dies durchzuführen, muss an jedem Punkt die Zeitableitung $\frac{dF}{dt}$ berechnet werden. Dies kann man entweder auf graphische oder auf numerische Weise durchführen. Im einfachen Fall, wenn die Datenpunkte in gleich großen Intervallen vorliegen, ergibt sich der numerische Wert der Zeitableitung einer Funktion $f(t)$ am Punkt t_i mit den Datenpunkten $(t_1, f_1), (t_2, f_2), (t_3, f_3), \dots$, näherungsweise aus der Formel

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

Dabei ist h die (konstante) Intervallbreite zwischen den Punkten und N die Anzahl der Punkte.

Wenn die Intervalle zwischen den Datenpunkten nicht alle die gleiche Breite haben, ergibt sich der numerische Wert der Zeitableitung näherungsweise aus der Formel

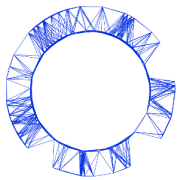
$$\left. \frac{df}{dt} \right|_i = \frac{h_-^2 f_{i+1} - h_+^2 f_{i-1} + (h_+^2 - h_-^2) f_i}{h_+^2 h_- + h_+ h_-^2} \quad i = 2, \dots, N-1 \quad (13)$$

Dabei sind $h_+ = (t_{i+1} - t_i)$ und $h_- = (t_i - t_{i-1})$, und N ist die Anzahl der Punkte.

Die Auswertung der Daten und die Bestimmung der relevanten Parameter erfolgt in einer Reihe von Schritten. Verfahre unter Anwendung von Gleichung (11) folgendermaßen:

D.6	Nimm an, dass dein Datensatz über τ_2 hinausgeht, und berechne die Ableitung $\frac{dF}{dt}$ für Datenpunkte von $t > 1000$ s. Notiere die Werte in der in A.3 benutzten Tabelle. Im Falle einer graphischen Bestimmung von $\frac{dF}{dt}$ benutze das Millimeterpapier auf dem Antwortblatt.	0.5pt
D.7	Notiere auf dem Antwortblatt einen Ausdruck für die erwartete Zeitabhängigkeit von $\frac{dF}{dt}$ für den Fall eines einzelnen viskoelastischen Prozesses.	0.3pt
D.8	Bestimme mit graphischen Mitteln die Parameter E_1 und τ_1 in SI-Einheiten aus den in D.6 erwähnten Datenpunkten. Notieren Sie E_1 und τ_1 auf dem Antwortblatt (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	1.0pt
D.9	Bestimme den Parameter E_0 in SI-Einheiten aus den in D.6 erwähnten Datenpunkten und notiere ihn auf dem Antwortblatt (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	0.3pt
D.10	Fülle die Spalte $y(t)$ in der in A.3 benutzten Tabelle aus, indem du die elastische und die längste viskoelastische Komponente von $F(t)$ subtrahierst (die in D.6 benutzten Punkte brauchst du hierbei nicht zu berücksichtigen).	0.3pt
D.11	Bestimme mit graphischen Mitteln aus $y(t)$ (siehe D.10) die Parameter für die zweite viskoelastische Komponente E_2 und τ_2 in SI-Einheiten. Gib E_2 und τ_2 auf dem Antwortblatt an (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	1.0pt

Experiment



IPhO 2018
Lisbon, Portugal

Q2-12

Austrian German (Austria)

Zusätzliche viskoelastische Komponenten können in ähnlicher Weise bestimmt werden.

D.12	Ermittle das für die dritte Komponente relevante Zeitintervall $[t_i, t_f]$. Gib t_i und t_f auf dem Antwortblatt an (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	0.3pt
-------------	---	-------

D.13	Schätze den Wert von τ_3 in SI-Einheiten aus dem Graphen in D.11 ab und notiere ihn auf dem Antwortblatt (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	0.3pt
-------------	--	-------

Teil E: Messung von E mit einem Torsionspendel (0.6 Punkte)

Beobachte nun den kurzen Faden, den du im **Teil C** angebracht haben. Du kannst jetzt davon ausgehen, dass dieser Faden seinen stationären Dehnungswert $\epsilon = \sigma/E$ angenommen hat.

E.1	Bestimme E direkt aus der Länge des gedehnten Fadens. Notiere ihn auf dem Antwortblatt zusammen mit der relativen Differenz zum Wert von E_0 , den du in Teil D erhalten hast (die Angabe einer Messunsicherheit ist nicht erforderlich).	0.6pt
------------	--	-------