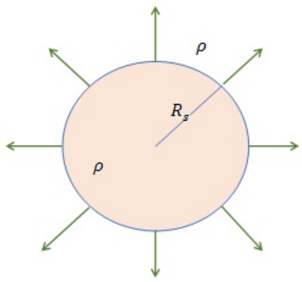
## Kosmische Inflation

Da sich beobachtete Galaxien relativ zur Erde bewegen, unterscheidet sich die beobachtete Wellenlänge einer bestimmten Galaxie von jener Wellenlänge, die in Ruhe auftritt. Man spricht vom elektromagnetischen Dopplereffekt. Man erwartet für eine Ansammlung von Galaxien eine zufällige Verteilung dieser Verschiebungen der Wellenlänge: einige positive (Rotverschiebung) und einige negative (Blauverschiebung). Trotzdem zeigen Beobachtungen, dass nur Rotverschiebungen auftreten (ausgenommen: einige nahe Galaxien). Diese Tatsache muss für alle Beobachter im Weltall gelten. Daraus schließt man, dass sich das Universum insgesamt ausdehnt. Allerdings können lokale Ausnahmen davon bei einer Skalierung von 100 Mpc vernachlässigt werden (1 pc = 3,26 Lichtjahre). Je größere Distanzen man (in alle Raumrichtungen) betrachtet, desto homogener sind die Galaxien im Raum verteilt und ihre Ausbreitung erfolgt in alle Richtungen des Raumes gleichartig (isotropisch). Daher kann man annehmen, dass eine konstante Massendichte $\rho$ hat und sich ausdehnt.

### A. Expansion des Universums




Als einfaches Modell für unser Universum nehmen wir eine sich ausdehnende Kugel mit konstanter Dichte an, die in eine viel größere Kugel eingebettet ist, die dieselbe Dichte hat. Nehmen wir an, dass die kleinere Kugel zu einem bestimmten Zeitpunkt den Radius $R_s$ hat. Um die Expansion der Kugel auszudrücken, kann die Zeitanhängigkeit des Radius $R(t)$ durch eine Skalierungsfunktion $a(t)$ ausgedrückt werden, sodass gilt: $R(t) = a(t)R_s$.

Die Friedmanngleichungen erhält man, indem man unter Verwendung des Newtonschen Gravitationsgesetztes die Geschwindigkeit eines Massenelementes auf der Kugekoberfläche ausdrückt:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1\rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \qquad (1)$$

wobei $k$ eine dimensionslose Konstante ist und $c$ die Lichtgeschwindigkeit ist.

| | | |
|---|---|---|
| A.1 | Bestimme die Konstante $A_1$ in Gleichung (1). | 1.3 pt. |

Die Diskussion ist so weit nicht-relativistisch. Tatsächlich kann sie relativistsich gesehen werden, indem man $\rho(t)c^2$ als gesamte Energiedichte (ausgenommen die gravitative potenzielle Energie) auffasst. In diesem relativistischen System erhält man die 2. Friedmann-Gleichung:

$$\dot{\rho} + A_2 \left(\rho + \left(\frac{p}{c^2}\right)\right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \qquad (2)$$

Dabei wurde angenommen, dass sich das System adiabatisch verhält und $c$ die Lichtgeschwindigkeit und $p$ den Druck bezeichnet.

| | | |
|---|---|---|
| A.2 | Bestimme die Konstante $A_2$ in Gleichung (2). | 0.9 pt. |

Um die Gleichungen (1) und (2) zu lösen, kann man annehmen, dass der Druck p eine Funktion der Dichte ist, also z.B. $p(t)/c^2 = w\rho(t)$, wobei $w$ eine Konstante ist. Der Faktor $H = \dot{a}/a$ wird als Hubble-Parameter bezeichnet. Die heutigen Werte aller Parameter werden üblichweise durch den Index 0 bezeichnet, z.B. $t_0$, $\rho_0$, $H_0$, $a_0$ und so weiter. Zwecks Vereinfachung nehmen wir $a_0 = 1$ an.

Man glaubt, der Beginn des Universum war eine große Explosion, die Big Bang genannt wird. Es wurden in der Folge relativistische Teilchen produziert. Während der Expamsion kühlte das Universum ab und die Teilchen wurden nicht-relativistisch. Die Wellenlänge der auftretenden Photonen vergrößert sich mit der Ausdehnung. Heutige Beobachtungen zeigen, dass das Universum derzeit durch eine konstante Energiedichte gekennzeichnet ist.

| | | |
|---|---|---|
| A.3 | Bestimme für jeden der folgenden drei Fälle den Wert von $w$:<br>• (i) Das Universum ist nur von Strahlung erfüllt (das ist die Photonenenergie)<br>• (ii) Das Universum ist nur von nicht-relativistischen Teilchen erfüllt<br>• (iii) Im Universum herrscht konstante Energiedichte. | 1.2 pt. |
| A.4 | Bestimme $a(t)$ für jeden der drei Fälle (i) bis (iii) aud Aufgabe A.3 falls im Fall $k = 0$ ist. Benutze die Anfangsbedingung $a(t = 0) = 0$ für die Fälle (i) und (ii) und benutze $a_0 = 1$ für den Fall (iii). | 1.2 pt. |

Mit der Konstanten $k$ in Gleichung (1) kann man die räumliche Geometrie des Universums klassifizieren. Für $k = +1$ sprechen wir von einem positiv gekrümmten (geschlossen), für $k = 0$ sprechen wir von einem flachen Universum (unendlich) udn für $k = -1$ von einem negativ gekrümmten (offen, unendlich) Universum. Wir definieren ein Dichteverhältnis $\Omega = \rho/\rho_c$, wobei $\rho_c c^2 = H^2/A_1$ die kritische Energiedichte bezeichnet. Beachte, dass $A_1$ der Fragestellung A.1 entnommen wird.

| | | |
|---|---|---|
| A.5 | Drücke $k$ in Gleichung (1) durch $\Omega$, $H$, $a$, und $R_0$ aus. | 0.1 pt. |
| A.6 | Finde einen Bereich für $\Omega$, der jeweils mit den Werten für $k = +1$, $k = 0$ und $k = -1$ korrspondiert. | 0.3 pt. |

## B. Motivation um die Inflationsphase einzuführen und allgemeine Bedingungen

Beobachtungen des kosmischen Mikrowellenhintergrunds (CMB) legen nahe, dass unser gegenwärtiges Universum nahezu flach ist. Das Problem dabei ist, dass in diesem Fall das Universum schon flach begonnen haben muss. Andernfalls würde jede Abweichung von der Flachheit im Laufe der Zeit zunehmen und diese zerstören.

| | | |
|---|---|---|
| B.1 | Bestimme für das Universum $(\Omega(t) - 1)$ als Funktion der Zeit, falls es strahlungsdominiert oder durch nicht-relativistische Materie dominiert ist (vergleiche Aufgabe A.3). | 0.5 pt. |

Um diese Problem zu lösen, muss angenommen werden, dass das Universum in einer Frühzeit eine Inflationsperiode durchgemacht haben muss, die von konstanter Energiedichte gekennzeichnet war.

| | | |
|---|---|---|
| B.2 | Bestimme für diese Periode der konstanten Energiedichte $(\Omega(t) - 1)$ als Funktion der Zeit. Nimm an, dass $(\Omega(t) - 1) \ll 1$ ist. | 0.3 pt. |
| B.3 | Zeige, dass folgende Bedingungen für die Inflation erfüllt sein müssen: negativer Druck, beschleunigte Expansion $(\ddot{a} > 0)$ und abnehmender Hubbleradius $(d(aH)^{-1}/dt < 0)$. | 0.9 pt. |
| B.4 | Zeige, dass die Bedingung für einen abnehmenden Hubbleradius durch den Parameter $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ wobei $\epsilon < 1$ ist, ausgedrückt werden kann. | 0.2 pt. |

Inflation tritt solange auf, solange $\epsilon < 1$ und endet, wenn $\epsilon = 1$ ist. Wir können die "e-folding Zahl" $N$ definieren, sodass am Ende der Inflationsphase gilt: $dN = d\ln a = Hdt$ und $N = 0$.

## C. Inflation, die durch homogen verteilte Materie erzeugt wird

Ein Universum, das von homogen verteilter Materie dominiert wird, ist ein Beispiel für ein physikalisches System, welches eine Inflationphase erzeugen kann. Solche Materie wird Inflaton genannt und kann durch eine Funktion $\phi(t)$ charakterisiert werden.

Die Bewegungsgleichung der Materie kann durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \tag{3}$$

wobei $V = V(\phi)$ eine Potentialfunktion ist und $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Der Hubbleparameter erfüllt

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]. \tag{4}$$

wobei $M_{pl}$ eine Konstante ist, die reduzierte Plancksche Masse genannt wird. Eine Inflationsphase tritt auf, wenn die potentielle Energie $V$ über längere Zeit die kinetische Energie $\dot{\phi}^2/2$ dominiert, sodass $\ddot{\phi}$ in Gleichung (3) vernachlässigt werden kann. Diese Bedingung wird auch "slow-roll approximation" genannt.

Die Größen $\epsilon$ und $\eta_V = \delta + \epsilon$, wobei $\delta = -\ddot{\phi}/H(\dot{\phi})$, werden "slow-roll"-Parameter genannt.

| | | |
|---|---|---|
| C.1 | Schätze die Parameter $\epsilon$, $\eta_V$ und $dN/d\phi$ in Abhängigkeit des Potenzials $V(\phi)$ und seiner ersten und zweiten Ableitung ($V'$ and $V''$) ab. | 1.7 pt. |

## D. Inflation mit einem einfachen Potenzial

Voraussagen eines Inflationsmodells sollten mit Beobachtungen des CMB verglichen werden. Die Einschränkungen sind $n_s$ = 0.968 $\pm$ 0.006 und $r$ < 0.12, wobei $r = 16\epsilon$ und $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$ bei $\phi = \phi_{start}$ ausgewertet werden für das Inflationsmodell, das von einer dominanten Art von Materie erzeugt wird. Nimm an, dass das Potential der Materie die Form $V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ hat, wobei $n$ eine ganze Zahl und $\Lambda$ eine Konstante ist.

| | | |
|---|---|---|
| D.1 | Berechne $\phi_{end}$ am Ende der Inflationsphase. | 0.5 pt. |
| D.2 | Drücke $r$ und $n_s$ in Abhängigkeit der "e-folding Zahl" N und ganzzahligem $n$ aus. Schätze den Wert von $n$ ab, der den beobachtetetn Werten von $r$ und $n_s$ am nähesten kommt. Verwende $N$ = 60 in deiner Berechnung. | 0.9 pt. |