

Dunkle Materie

Der erste Nachweis der Existenz dunkler Materie wurde von Fritz Zwicky erbracht, der die Dynamik im Coma Galaxienhaufen, einem Galaxienhaufen mit etwa tausend Galaxien, untersucht hat. Zwicky benutzte das Virialtheorem, um die Masse des Haufens abzuschätzen.

In einem einfachen Planetensystem, in dem ein Planet sich auf einer Kreisbahn um einen Stern bewegt, macht das Virialtheorem eine exakte Aussage über die kinetische Energie in Abhängigkeit von der potentiellen Energie. Im allgemeineren Fall eines Systems vieler Teilchen, die durch eine Wechselwirkung gebunden sind, stellt das Virialtheorem eine Beziehung zwischen der mittleren kinetischen Energie und der mittleren potentiellen Energie her.

Im Jahr 1933 konnte Zwicky basierend auf seinen Beobachtungen von Galaxien am Rande des Coma Galaxienhaufens abschätzen, dass der Haufen mehr Masse als die beobachtbaren Galaxien enthält. Die Gravitationsanziehung durch die sichtbare Materie (also die Galaxien) ist zu klein, um die Geschwindigkeiten der Galaxien zu erklären.

Daher muss der Haufen noch weitere, versteckte Masse enthalten. Diese Masse wird als dunkle Materie bezeichnet. Nimm im Folgenden an, dass sich die Masse einer Galaxie zusammensetzt aus ihrer sichtbaren Masse und der Masse der dunklen Materie, die sich zusammen mit der Galaxie bewegt. Nimm außerdem an, dass die dunkle Materie nur durch Gravitation mit der sichtbaren Materie wechselwirkt.

A. Galaxienhaufen

Betrachte einen homogen, auf einer Kugel mit Radius R verteilten Galaxienhaufen, der aus einer großen Anzahl N an Galaxien sowie dunkler Materie besteht. Die Gesamtmasse (sichtbare und dunkle Materie) des Galaxienhaufens sei M . Die durchschnittliche Gesamtmasse einer einzelnen Galaxie wird mit m bezeichnet und du kannst annehmen, dass der Haufen im thermischen Gleichgewicht ist.

A.1	Gehe von einer kontinuierlichen Verteilung der Materie in dem Galaxienhaufen aus und bestimme die Gravitationsenergie des Haufens als Funktion von M und R .	1.0 pt.
-----	--	---------

Aufgrund der Expansion des Universums entfernt sich ein weit entferntes Objekt mit einer von dem Abstand des Objektes abhängigen Geschwindigkeit von einem Beobachter auf der Erde weg. Dadurch wird eine bestimmte Lymanlinie (Emissionslinie von Wasserstoff) einer Typ-IA Supernova in der i -ten Galaxie mit $i = 1, \dots, N$ bei der Frequenz f_i beobachtet, während die entsprechende Linie auf der Erde bei der Frequenz f_0 beobachtet wird.

A.2	Bestimme die mittlere Geschwindigkeit V_{cr} , mit der sich der sich der Galaxienhaufen von der Erde wegbewegt. Drücke dein Ergebnis durch f_i (mit $i = 1, \dots, N$), f_0 und N aus. Beachte, dass die Galaxiengeschwindigkeiten sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind.	0.5 pt.
-----	---	---------

A.3	Nimm an, dass die Geschwindigkeiten der Galaxien bezüglich des Zentrums des Haufens isotrop, also gleichmäßig in alle Richtungen, verteilt sind. Bestimme die Wurzel der mittleren quadratischen Geschwindigkeit v_{rms} (<i>root-mean square velocity</i>) der Galaxien relativ zum Zentrum des Galaxienhaufens. Drücke das Ergebnis durch N , f_i (mit $i = 1, \dots, N$) und f_0 aus. Bestimme aus dem Ergebnis die mittlere kinetische Energie einer Galaxie relativ zum Zentrum des Haufens. Drücke das Ergebnis durch v_{rms} und m aus.	1.5 pt.
-----	---	---------

Die Gesamtmasse des Galaxienhaufens kann mit Hilfe des Virialtheorems bestimmt werden. Demnach gilt für ein, durch eine konservative Kraft gebundenes System, dass

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

wobei $\langle K \rangle_t$ das zeitliche Mittel der kinetischen Energie und $\langle U \rangle_t$ das zeitliche Mittel der potentiellen Energie des Systems darstellt. γ bezeichnet eine Konstante. Dieses Theorem kann hergeleitet werden, indem für ein System wechselwirkender Teilchen angenommen wird, dass die Impulse aller Teilchen endlich bleiben und damit die Größe

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

ebenfalls endlich ist.

A.4	Verwende die Tatsache, dass für lange Zeiträume $d\Gamma/dt$ verschwindet, das heißt $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$. Bestimme daraus γ des Virialtheorems für den Fall der gravitativen Wechselwirkung, indem du Γ für eine kleine Anzahl von Galaxien aufsummierst.	1.7 pt.
A.5	Nutze das Ergebnis, um die Gesamtmasse der dunklen Materie in dem Galaxienhaufen zu bestimmen. Drücke dein Ergebnis durch N , m_g , R und v_{rms} aus, wobei m_g die durchschnittliche sichtbare Masse einer Galaxie bezeichnet. Beachte, dass die mittlere quadratische Geschwindigkeit der dunklen Materie der der Galaxien entspricht.	0.5 pt.

B. Dunkle Materie in einer Galaxie

Dunkle Materie findet sich ebenfalls in Galaxien und in deren Nähe. Betrachte eine sphärische Galaxie mit einem sichtbaren Radius R_g . Dieser gibt an, bis zu welchem Abstand vom Zentrum viele Sterne vorhanden sind (Vereinzelt finden sich aber auch Sterne jenseits von R_g). Nimm an, dass die Sterne in der Galaxie als Punktteilchen mit einer mittleren Masse m_s betrachtet werden können, die homogen mit einer Anzahldichte n in der Galaxie verteilt sind und sich auf Kreisbahnen bewegen.

B.1	Betrachte eine Galaxie, die nur aus Sternen besteht. Bestimme die Geschwindigkeit $v(r)$ eines Sterns in Abhängigkeit von dem Abstand r zum Zentrum der Galaxie. Skizziere $v(r)$ für $r < R_g$ und $r \geq R_g$.	0.8 pt.
-----	--	---------

Auf die Existenz dunkler Materie kann aus galaktischen Rotationskurven geschlossen werden, die die tatsächlich beobachteten Geschwindigkeiten $v(r)$ darstellen. Die folgende Abbildung zeigt eine typische galaktische Rotationskurve. Du kannst vereinfachend annehmen, dass $v(r)$ für $r \leq R_g$ linear ist und einen konstanten Wert v_0 für $r > R_g$ annimmt.

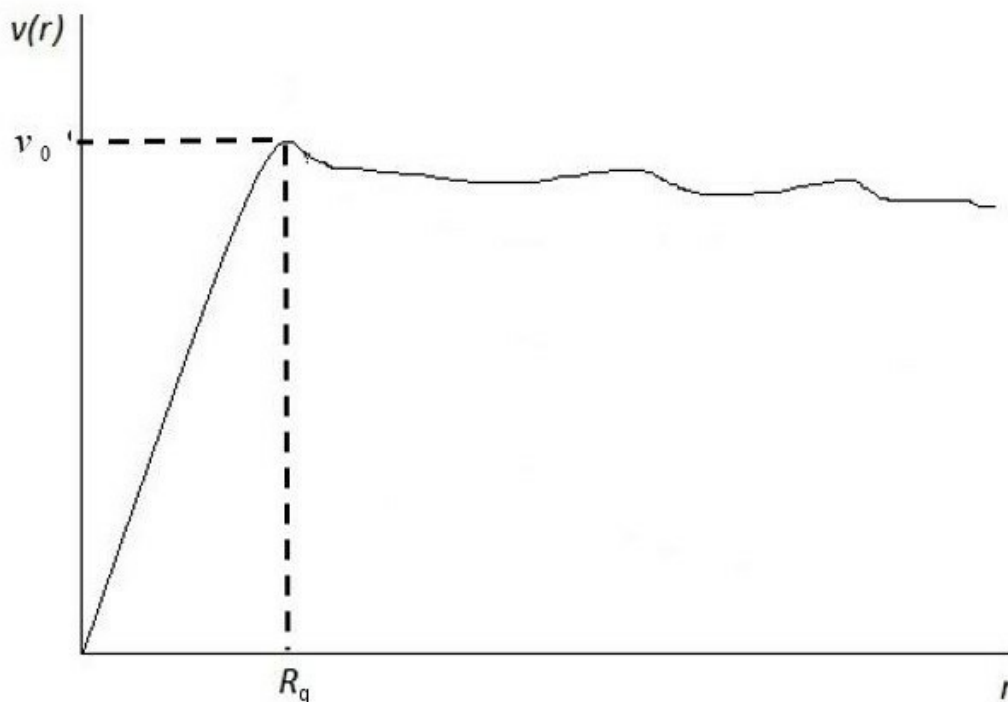


Abb. 1 Graph einer Rotationkurve einer Galaxie.

B.2	Ermittle die Gesamtmasse m_R jenes Teils der Galaxie, der innerhalb einer Kugel mit Radius R_g liegt, in Abhängigkeit von v_0 und R_g .	0.5 pt.
-----	---	---------

Der Unterschied zwischen dem obigen Graphen und dem in B.1 erhaltenen Verlauf deutet auf die Existenz dunkler Materie hin.

B.3	Bestimme die Dichte der dunklen Materie in Abhängigkeit von r , R_g , v_0 , n und m_s für $r < R_g$ sowie $r \geq R_g$.	1.5 pt.
-----	--	---------

C. Interstellares Gas und Dunkle Materie

Betrachte nun eine junge Galaxie, deren Masse von interstellarem Gas und dunkler Materie dominiert wird (vernachlässige die Masse der Sterne). Nimm dabei an, dass das interstellare Gas aus identischen Teilchen der Masse m_p besteht. Die Anzahldichte $n(r)$ und die Temperatur $T(r)$ des Gases hängen vom Abstand zum Zentrum der Galaxie r ab. Obwohl viele physikalische Prozesse in einem Gas ablaufen, kannst du annehmen, dass das Gas aufgrund seines Druckes und der gravitativen Anziehungskraft der Galaxie im hydrostatischem Gleichgewicht ist.

C.1	Berechne den Druckgradienten des Gases dP/dr . Drücke dein Ergebnis durch $m'(r)$, r und $n(r)$ aus. Dabei ist $m'(r)$ die Gesamtmasse des Gases und der dunklen Materie innerhalb einer Kugel mit Radius r um das Zentrum der Galaxie.	0.5 pt.
-----	--	---------

C.2	Nimm im Folgenden an, dass das interstellare Gas ein ideales Gas ist. Berechne $m'(r)$. Drücke dein Ergebnis durch $n(r)$, $T(r)$ und deren Ableitungen nach r aus.	0.5 pt.
-----	---	---------

Nimm im Folgenden an, dass das Gas eine konstante Temperatur T_0 hat. Die Anzahldichte sei gegeben durch

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

wobei α und β Konstanten sind.

C.3	Bestimme die Dichte der dunklen Materie innerhalb der Galaxie in Abhängigkeit von r .	1.0 pt.
-----	---	---------