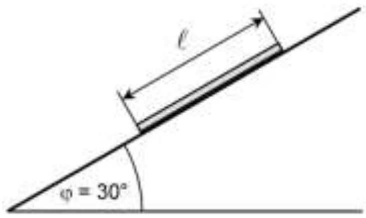
PLAKAT-AUFGABE ZUR ÖPHO-2013

Die Aufgabe des aktuellen ÖPHO-Plakates ist eine vereinfachte Aufgabe des LWB-2006. Im Folgenden wird diese Aufgabe und deren Lösung vorgestellt:



Eine rechteckige Metallplatte mit Länge l = 40 cm und Masse $m = 1$ kg liegt auf einem um den Winkel φ = 30° geneigten, ebenen Dach. Der Wärmeausdehnungskoeffizient des Metalls beträgt α = 2.10^{-5} K^{-1}, die Wärmeausdehnung des Daches sei Null, der Reibungskoeffizient zwischen Dach und Metall μ = 0,7.

Hinweis 1: Man kommt in diesem Beispiel auch ohne sin- u. cos-Funktionen aus, da bei der Dachschräge von 30° eine Gravitationskraft G in einen parallelen Anteil von $1/2 \cdot G$ und einen zum Dach senkrechten Anteil von $\sqrt{3}/2 \cdot G$ zerlegt werden kann.

*Welche parallele Kraft F_p ist nötig, bis die Platte zu rutschen beginnt?

Um welches Stück Δl dehnt sich die Platte aus, wenn sie sich tagsüber um ΔT = 40° C erwärmt? *Hinweis 2:* Wenn sich die Platte ausdehnt (oder zusammenzieht), so muss sie rutschen. Ein Punkt der Platte kann aber an derselben Stelle bleiben.

*Wo ist dieser Punkt (Abstand x (bzw. y) von der Oberkante), wo sind die Kräfte im Gleichgewicht?

Durch die Erwärmung tagsüber um ΔT = 40° C dehnt sich die Platte aus, durch die gleich große Abkühlung in der Nacht zieht sie sich wieder zusammen. Allerdings ist beim Ausdehnen und beim Zusammenziehen jeweils ein anderer Punkt der Platte in Ruhe. Die Platte bleibt etwas weiter unten liegen. * Wie weit wandert sie während eines Tag/Nacht Zyklus?

LÖSUNG

Die maximale Haftreibungskraft ergibt sich aus der Kraftkomponente F_s senkrecht zum Dach als $F_R = \mu \cdot F_s = \mu \cdot mg \cdot \cos\varphi = 0{,}7 \cdot 1 \cdot 9{,}81 \cdot \sqrt{3}/2 = 5{,}95$ N. Wenn die parallele Kraftkomponente größer als F_R wird, so beginnt die Platte zu rutschen. Die Längenausdehnung der Platte beträgt $\Delta\ell = \alpha \cdot \Delta T \cdot \ell = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \cdot 0{,}4 = 3{,}2 \cdot 10^{-4}$ m = 0,32 mm. Nehmen wir an, dass es einen Punkt innerhalb der Länge der Platte gibt, in dem die Summe der Kräfte Null ist, sodass dieser Punkt bei der Wärmeausdehnung in Ruhe bleibt. Die Reibungskraft des oberen Teiles der Platte wirkt parallel zur Platte nach unten (der Bewegung entgegen) und ist proportional zur senkrechten Komponente der Gewichtskraft des oberen Teiles, also $x/\ell \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\varphi$. Entsprechend bewirkt der untere Teil eine Kraft $(\ell - x)/\ell \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\varphi$ nach oben. Zudem wirkt die parallele Komponente der Gewichtskraft $F_p = mg \cdot \sin\varphi$ nach unten. Die Summe aller Kräfte im Punkt X ist also:

$$(\ell - x)/\ell \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\varphi \ - \ x/\ell \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\varphi \ - \ mg \cdot \sin\varphi = 0$$

daraus kann man den Abstand x bestimmen, sodass die Gleichung tatsächlich erfüllt ist:

$$x = \ell/2 \cdot \left(1 - \frac{\sin\varphi}{\mu \cdot \cos\varphi}\right)$$

Wenn sich die Platte beim Abkühlen zusammenzieht, haben die Reibungskräfte umgekehrtes Vorzeichen, die parallele Komponente der Gewichtskraft aber gleiches Vorzeichen. Es ergibt sich ein anderer Punkt Y im Abstand y von der Oberkante der Platte, der in Ruhe bleibt. Eine vollkommen äquivalente Rechnung ergibt: $y = \ell/2 \cdot \left(1 + \frac{\sin\varphi}{\mu \cdot \cos\varphi}\right)$ Bei der Wärmeausdehnung ist der Punkt Y um $(y - x) \cdot \alpha \cdot \Delta T$ nach unten gewandert. Beim anschließenden Zusammenziehen bleibt aber Y an der gleichen Stelle und die Platte hat wieder die ursprüngliche Größe. Sie ist also auch insgesamt um $(y - x) \cdot \alpha \cdot \Delta T = \ell \cdot \frac{\sin\varphi}{\mu \cdot \cos\varphi} \cdot \alpha \cdot \Delta T = 0{,}264$ mm nach unten gewandert!

Helmuth Mayr