Solare Teilchen (Gesamt: 10 Punkte)

Photonen von der Oberfläche und Neutrinos aus dem Inneren der Sonne geben Aufschluss über die dort herrschenden Temperaturen und bestätigen, dass die Sonne aufgrund von Kernreaktionen scheint.

Verwende in dieser Aufgabe für die Masse der Sonne den Wert $M_\odot = 2.00 \times 10^{30}$ kg, für den Sonnenradius $R_\odot = 7.00 \times 10^{8}$ m, für die Strahlungsleistung (*luminosity*) der Sonne $L_\odot = 3.85 \times 10^{26}$ W und für den Abstand zwischen Erde und Sonne $d_\odot = 1.50 \times 10^{11}$ m.

Hinweis:

(i) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} + \text{ konstant}$

(ii) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} + \text{ konstant}$

(iii) $\int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right) e^{ax} + \text{ konstant}$

A Strahlung der Sonne:

A1	Nimm an, dass sich die Sonne wie ein idealer schwarzer Körper verhält und berechne die Oberflächentemperatur T_s der Sonne.	**0,3**

Das Spektrum der Sonnenstrahlung kann näherungsweise mit dem Wienschen Strahlungsgesetz beschrieben werden. Demnach ist die solare Strahlungsenergie $u(\nu)$, die auf eine Oberfläche auf der Erde pro Zeiteinheit und pro Frequenzeinheitsintervall auftrifft, gegeben durch

$$u(\nu) = A \frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-h \frac{\nu}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{s}}\right).$$

Dabei bezeichnen ν die Frequenz und A die zur Einstrahlungsrichtung senkrechte Größe der bestrahlten Fläche.

Betrachte nun eine Solarzelle, bestehend aus einer dünnen Scheibe eines Halbleitermaterials mit der Oberfläche A, die senkrecht zur Einstrahlungsrichtung orientiert ist.

A2	Verwende das Wiensche Strahlungsgesetz, um die insgesamt auf die Oberfläche der Solarzelle einfallende Sonnenstrahlungsleistung P_in durch A, $R_\odot$, $d_\odot$, T_s und die Naturkonstanten c, h, k_B auszudrücken.	**0,3**
A3	Bestimme die Zahl der Photonen $n_\gamma(\nu)$, die pro Zeit und Frequenzeinheitsintervall auf die Oberfläche der Solarzelle treffen ausgedrückt durch A, $R_\odot$, $d_\odot$, T_s, ν und die Naturkonstanten c, h, k_B.	**0,2**

Das Halbleitermaterial der Solarzelle besitzt eine “Bandlücke” der Energie E_g. Betrachte ein Modell, in dem jedes Photon mit Energie $E \geq E_\mathrm{g}$ ein Elektron über die Bandlücke anregt, das eine Energie E_g zur nutzbaren Energie beiträgt. Die zusätzliche Energie wird in Form von Wärme dissipiert und ist nicht nutzbar.

A4	Definiere $x_\mathrm{g} = h\nu_\mathrm{g}/k_\mathrm{B}T_\mathrm{s}$ mit $E_\mathrm{g} = h\nu_\mathrm{g}$. Drücke die nutzbare Energie der Solarzelle P_out durch die Größen x_g, A, $R_\odot$, $d_\odot$, T_s sowie die Naturkonstanten c, h, k_B aus.	**1,0**
A5	Bestimme den Wirkungsgrad η der Solarzelle ausgedrückt durch x_g.	**0,2**
A6	Fertige eine Skizze von η über x_g an. Die Werte für $x_\mathrm{g} = 0$ und $x_\mathrm{g} \to \infty$ sollten klar erkennbar sein. Gib die Steigung von $\eta(x_\mathrm{g})$ bei $x_\mathrm{g} = 0$ und $x_\mathrm{g} \to \infty$ an.	**1,0**
A7	Bezeichne mit x_0 den Wert von x_g, für den η maximal wird. Leite eine kubische Gleichung für x_0 ab und schätze den Wert von x_0 mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}25$ ab. Berechne damit $\eta(x_0)$.	**1,0**
A8	Die Bandlücke von reinem Silizium beträgt $E_\mathrm{g} = 1.11$ eV. Berechne den Wirkungsgrad η_Si einer Siliziumsolarzelle mit diesem Wert.	**0,2**

Ende des neunzehnten Jahrhunderts haben Kelvin und Helmholtz (KH) eine Hypothese zur Erklärung der Sonnenstrahlung vorgeschlagen. Sie postulierten, dass die Sonne sich aus einer anfänglich sehr großen Gaswolke mit Masse $M_\odot$ und vernachlässigbarer Dichte langsam zusammenzieht und dass die Sonnenstrahlung aus der dabei frei werdenden potentiellen Energie im Gravitationsfeld gespeist wird.

A9	Nimm an, dass die Massendichte innerhalb der Sonne konstant ist. Bestimme die Gesamtgravitationsenergie Ω der Sonne zum heutigen Zeitpunkt und drücke sie durch G, $M_\odot$ and $R_\odot$ aus.	**0,3**
A10	Schätze damit die maximale Zeit τ_{KH} (in Jahren) ab, die die Sonne aufgrund des KH-Mechanismus hätte strahlen können. Nimm dabei die Strahlungsleistung der Sonne als konstant an.	**0,5**

Der bestimmte Wert für τ_{KH} passt nicht zu dem z.B. aus Meteoriten bestimmten Alter des Sonnensystems. Daher kann die Sonne ihre Energie nicht ausschließlich aus der Gravitationsenergie beziehen.

B Solare Neutrinos :

1938, schlug Hans Bethe die Fusion von Wasserstoff zu Helium als Energiequelle im Kern der Sonne vor. Die ablaufende Kernreaktion lässt sich zusammenfassen zu:

$$4\,{}^{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{e}^{+} + 2\nu_{\mathrm{e}}$$

Die in dieser Reaktion erzeugten “Elektron-Neutrinos” ν_{e} können als masselos angenommen werden. Ihr Nachweis auf der Erde bestätigt das Auftreten von Kernreaktionen in der Sonne. Die von den Neutrinos abgeführte Energie kann in diesem Aufgabenteil vernachlässigt werden.

B1	Berechne den Fluss Φ_ν der Anzahl der auf der Erde auftreffenden Neutrinos in $\mathrm{m^{-2}s^{-1}}$. Die bei obiger Reaktion freigesetzte Energie beträgt $\Delta E = 4{,}0 \times 10^{-12}\mathrm{J}$. Nimm an, dass die Strahlungsenergie der Sonne ausschließlich mit dieser Reaktion erzeugt wird.	**0,6**

Während der Reise vom Sonneninneren zur Erde wandeln sich einige Elektron-Neutrinos ν_e in andere Neutrinoarten ν_{x} um. Die Effizienz der Detektoren bei Detektion von ν_{x} beträgt nur 1/6 der Effizienz für die Detektion von ν_e. Ohne Umwandlung der Neutrinos sollten durchschnittlich N_1 Neutrinos pro Jahr detektiert werden. Tatsächlich werden aufgrund der Umwandlung aber N_2 Neutrinos (ν_{e} und ν_{x} zusammen) pro Jahr detektiert.

B2	Berechne, welcher Anteil f der ν_{e} in ν_{x} konvertiert wird. Drücke das Ergebnis durch N_1 und N_2 aus.	**0,4**

Zum Nachweis von Neutrinos werden große, mit Wasser gefüllte Detektoren verwendet. Obwohl Neutrinos nur sehr schwach mit Materie wechselwirken, lösen sie gelegentlich ein Elektron aus einem Wassermolekül im Detektor heraus. Diese energiereichen Elektronen bewegen sich mit großer Geschwindigkeit im Wasser und emittieren dabei elektromagnetische Strahlung. So lange die Geschwindigkeit des Elektrons größer als die Lichtgeschwindigkeit im Wasser (Brechungsindex n) ist, wird diese so genannte Cherenkov-Strahlung kegelförmig abgestrahlt.

B3	Nimm an, dass ein durch ein Neutrino ausgelöstes Elektron seine Energie mit konstanter Rate α abgibt, während es sich durchs Wasser bewegt. Bestimme die Energie E_{imparted}, die das Elektron von dem Neutrino erhalten hat, wenn es für eine Zeit Δt Cherenkovstrahlung aussendet. Drücke das Ergebnis durch α, Δt, n, m_{e} und c aus. (Nimm dabei an, dass das Elektron anfänglich in Ruhe ist.)	**2,0**

Die Fusion von H zu He in der Sonne geschieht in mehreren Schritten. In einem der Schritte wird ^{7}Be (Ruhemasse m_{Be}) erzeugt. Dieses kann dann durch Absorption eines Elektrons in einen ^{7}Li Kern umgewandelt werden (Ruhemasse $m_{\mathrm{Li}} < m_{\mathrm{Be}}$). Dabei wird ein ν_{e} emittiert. Die Kernreaktion lautet:

$$^{7}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} \longrightarrow {}^{7}\mathrm{Li} + \nu_{\mathrm{e}}$$

Wenn ein ruhender Be-Kern ($m_{\mathrm{Be}} = 11{,}65 \times 10^{-27}$ kg) ein Elektron absorbiert, das ebenfalls in Ruhe ist, besitzt das emittierte Neutrino eine Energie von $E_{\nu} = 1{,}44 \times 10^{-13}$ J. Tatsächlich befinden sich die Be-Kerne aufgrund der Temperatur T_{c} im Sterneninneren aber in zufälliger thermischer Bewegung und stellen so bewegte Neutrinoquellen dar. Daher ist die Energie der emittierten Neutrinos um einen Wert ΔE_{rms} (quadratisches Mittel) verschoben.

B4	Bestimme die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{Be} der Be-Kerne für ΔE_{rms}=$5{,}54 \times 10^{-17}$J. Schätze daraus die Temperatur T_{c} ab. (Hinweis: ΔE_{rms} hängt von der quadratisch gemittelten Geschwindigkeit in Beobachtungsrichtung ab).	**2,0**