Thermoakustische Maschine

Eine thermoakustische Maschine ist eine Maschine, die Wärme in akustische Energie oder Schallwellen - eine Form mechanischer Arbeit - umwandelt. Wie viele andere Wärmekraftmaschinen auch kann sie umgekehrt als Kältemaschine verwendet werden, indem Schall dazu verwendet wird Wärme von einem kalten zu einem warmen Reservoir zu pumpen. Die hohen Betriebsfrequenzen reduzieren die Wärmeleitung derart, dass keine zusätzliche Isolierung der Arbeitskammer notwendig ist. Im Gegensatz zu vielen anderen Maschinen hat eine thermoakustische Maschine keine beweglichen Teile außer dem Arbeitsmedium selbst.

Die Wirkungsgrade von thermoakustischen Maschinen sind in der Regel niedriger als die anderer Maschinentypen, aber thermoakustische Maschinen haben Vorteile bei den Rüst- und Wartungskosten. Dies schafft Anwendungsmöglichkeiten im Bereich der erneuerbaren Energien, wie solarthermische Kraftwerke und die Nutzung von Abwärme. Unsere Betrachtung konzentriert sich auf die Erzeugung akustischer Energie und vernachlässigt deren Entnahme oder Umwandlung zur Versorgung externer Geräte.

Teil A: Schallwellen in einem geschlossenen Rohr (3,7 Punkte)

Betrachte ein thermisch isoliertes Rohr mit der Länge L und der Querschnittsfläche S, deren Achse in x-Richtung zeigt. Die beiden Enden des Rohres befinden sich bei $x = 0$ und $x = L$. Das Rohr ist mit einem idealen Gas gefüllt und an beiden Enden verschlossen. Im Gleichgewicht hat das Gas die Temperatur T_0, den Druck p_0 und die Dichte ρ_0. Nimm an, dass die Viskosität vernachlässigt werden kann und dass sich das Gas nur in x-Richtung bewegt. Nimm weiters an, dass die Eigenschaften des Gases in y- und z-Richtung einheitlich sind.

Abbildung 1

A.1	Sobald sich eine stehende Welle bildet, schwingen die Gasteilchenpakete (kurz: Gaspakete) in x-Richtung mit der Kreisfrequenz ω. Die Amplitude der Schwingungen hängt von der Gleichgewichtsposition x jedes Elements entlang des Rohres ab. Die längsgerichtete Auslenkung eines Gaspaketes von seiner Ruheposition x ist gegeben durch $$u(x,t) = a\sin(kx)\cos(\omega t) = u_1(x)\cos(\omega t) \qquad (1)$$ (Beachte: u beschreibt hier die Auslenkung eines Gaspaketes) wobei $a \ll L$ eine positive Konstante, $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl und λ die Wellenlänge ist. Bestimme die maximal mögliche Wellenlänge $\lambda_{\max}$ des Systems.	0.3pt

Für die gesamten Frage nehmen wir an, dass eine Schwingung mit $\lambda = \lambda_{\max}$ vorliegt.

Betrachte nun ein kleines Gaspaket, das sich im Ruhezustand zwischen x und $x + \Delta x$ befindet ($\Delta x \ll L$). Als Folge der Welle von Aufgabe A.1 schwingt das Gaspaket entlang der x-Achse und ändert dabei sein Volumen und weitere thermodynamische Eigenschaften.

Für die folgenden Aufgaben wird angenommen, dass alle Veränderungen der thermodynamischen Eigenschaften klein sind verglichen zu den Werten eines ungestörten Systems.

A.2	Das Volume eines Gaspaketes $V(x,t)$ oszilliert um einen Gleichgewichtswert $V_0 = S\Delta x$ und hat die Form $$V(x,t) = V_0 + V_1(x)\cos(\omega t). \quad (2)$$ Ermittle einen Ausdruck für $V_1(x)$ in Abhängigkeit von V_0, a, k und x.	0.5pt

A.3	Nimm an, dass die durch die Schallwelle verursachte Abweichung des Gasdrucks von seinem Gleichgewichtswert die folgende Form hat: $$p(x,t) = p_0 - p_1(x)\cos(\omega t) \quad (3)$$ Bestimme die Amplitude $p_1(x)$ der Druckoszillation in Abhängigkeit der Position x, der Gleichgewichtsdichte ρ_0, der Verschiebungsamplitude a und der Parameter k und ω, indem du die Kräfte auf ein Gaspaket betrachtest.	0.7pt

Bei akustischen Frequenzen kann die Wärmeleitfähigkeit des Gases vernachlässigt werden. Wir werden die Ausdehnung und Kontraktion von Gaspaketen als rein adiabatisch behandeln. Dabei ist die Beziehung $pV^\gamma = \text{const}$ erfüllt, wo γ die adiabatische Konstante ist.

A.4	Benutze diese Beziehung und die Ergebnisse der vorherigen Aufgaben, um einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit $c = \omega/k$ in dem Rohr zu bestimmen. Gib deine Antwort in Abhängigkeit der Eigenschaften p_0, ρ_0 des Gases im Gleichgewicht und der adiabatischen Konstante γ an.	0.3pt

A.5	Die Änderung der Temperatur des Gases durch adiabatische Expansion und Kompression, hervorgerufen durch die Schallwelle, hat die Form: $$T(x,t) = T_0 - T_1(x)\cos(\omega t). \quad (4)$$ Berechne die Amplitude $T_1(x)$ der Temperaturoszillationen in Abhängigkeit von T_0, γ, a, k und x.	0.7pt

A.6	Für diesen Aufgabenteil gehen wir von einer schwachen thermischen Wechselwirkung zwischen dem Rohr und dem Gas aus. Dadurch bleibt die stehende Schallwelle nahezu unverändert, aber das Gas kann eine kleine Menge Wärme mit dem Rohr austauschen. Die Erwärmung aufgrund von Viskosität kann vernachlässigt werden. Gib für jeden der Punkte in Abbildung 2 (A und C an den Enden des Rohrs, B in der Mitte) an, ob dessen Temperatur über einen langen Zeitraum abnimmt, zunimmt oder gleich bleibt.	1.2pt

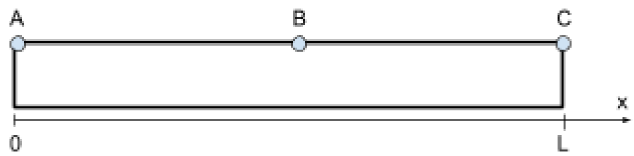

Abbildung 2

Teil B: Verstärkung von Schallwellen durch externen thermischen Kontakt (6,3 Punkte)

Ein Stapel dünner, fester Platten mit geeignetem Abstand wird im Inneren des Rohres platziert. Die Platten des Stapels sind parallel zur Rohrachse ausgerichtet, um den Gasstrom entlang des Rohres nicht zu behindern. Die Mitte des Stapels befindet sich bei $x_0 = L/4$ und der Stapel hat eine Breite von $\ell \ll L$ entlang der Rohrachse, wobei er den gesamten Querschnitt ausfüllt. Der rechte und linke Rand des Stapels wird auf einer Temperaturdifferenz τ gehalten. Der linke Rand des Stapels bei $x_H = x_0 - \ell/2$ wird von einem externen Wärmespeicher bei der Temperatur $T_H = T_0 + \tau/2$ gehalten. Gleichzeitig wird der rechte Rand bei $x_C = x_0 + \ell/2$ auf einer Temperatur $T_C = T_0 - \tau/2$ gehalten.

Der Plattenstapel ermöglicht einen leichten Wärmefluss in Längsrichtung, um einen konstanten Temperaturgradienten zwischen seinen Rändern aufrechtzuerhalten, sodass gilt: $T_{\text{plate}}(x) = T_0 - \frac{x - x_0}{\ell}\tau$.

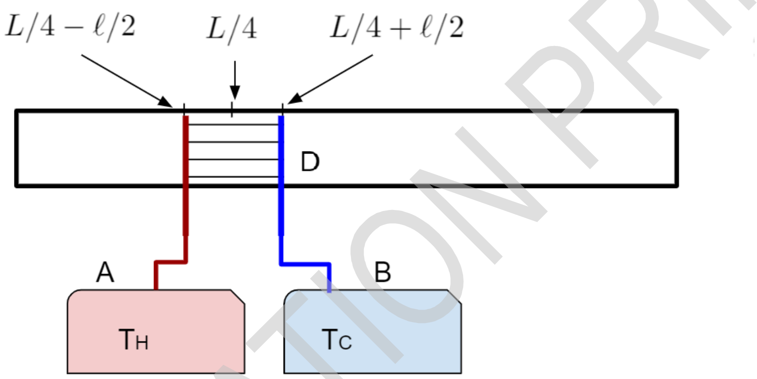

Abbildung 3. Skizze des Systems. (A) und (B) bezeichnen die heißen und kalten Wärmereservoirs. (D) bezeichnet den Plattenstapel.

Triff folgende Annahmen, um die Auswirkungen des thermischen Kontakts zwischen dem Plattenstapel und dem Gas auf die Schallwellen zu analysieren:

- Wie im vorherigen Aufgabenteil wird angenommen, dass alle Veränderungen der thermodynamischen Eigenschaften klein sind verglichen zu den Werten eines ungestörten Systems.
- Die stehende Welle im System hat die maximal mögliche Wellenlänge. Die Welle wird durch die Anwesenheit des Plattenstapels nur leicht verändert.
- Der Plattenstapel ist viel kürzer als die Wellenlänge $\ell \ll \lambda_{\text{max}}$ und ist weit genug von den Knotenpunkten der Auslenkung und des Drucks entfernt. Die Auslenkung $u(x,t) \approx u(x_0,t)$ und der Druck $p(x,t) \approx p(x_0,t)$ können daher über die gesamte Länge des Stapels als konstant angenommen werden.
- Randeffekte, die bei Eintritt bzw. Austritt des Gaspaketes in bzw. aus dem Plattenstapel entstehen, können vernachlässigt werden.
- Die Temperaturdifferenz zwischen den Enden der Platte, also zwischen dem heißen und kalten Reservoir ist klein gegenüber der absoluten Temperatur: $\tau \ll T_0$.
- Die thermischen Leitfähigkeiten des Gases, des Plattenstapels und des umgebenden Rohres sind vernachlässigbar. Die einzig signifikanten Wäremübertragungen sind Konvektion aufgrund der Gasbewegung und die Wärmeleitung zwischen dem Gas und dem Plattenstapel.

B.1	Betrachte ein Gaspaket im Bereich des Plattenstapels, das sich anfänglich bei $x_0 = L/4$ befindet. Wenn sich das Gaspaket im Stapel bewegt, ändert sich die Temperatur des umgebenden Plattenstapels, der sich in unmittelbarer Nähe befindet, wie folgt: $$T_{\text{env}}(t) = T_0 - T_{\text{st}} \cos(\omega t). \quad (5)$$ Drücke T_{st} in Abhängigkeit von a, τ und ℓ aus.	0.4pt

B.2	Oberhalb welcher kritischen Temperaturdifferenz τ_{cr} transportiert das Gas Wärme vom heißen zum kalten Reservoir? Drücke τ_{cr} in Abhängigkeit von T_0, γ, k und ℓ aus.	1.0pt

B.3	Leite eine Näherung für den Wärmefluss $\frac{dQ}{dt}$ in ein kleines Gaspaket als lineare Funktion der Änderungsraten von Volumen und Druck her. Gib deine Anwort in Abhängigkeit der Änderungsrate des Volumens $\frac{dV}{dt}$, der Änderungsrate des Drucks $\frac{dp}{dt}$, der Gleichgewichtswerte des Gaspaketes im ungestörten System bezüglich des Drucks p_0 und des Volumens V_0 und der adiabatischen Konstante γ an. (Du darfst den Ausdruck $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ für die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen verwenden. Dabei ist R die Gaskonstante.)	0.8pt

Der begrenzte Wärmefluss zwischen dem Gaspaket und dem Plattenstapel bewirkt eine Phasendifferenz zwischen den Druck- und Volumsoszillationen des Gaspakets. Dadurch wird Arbeit erzeugt:

Der Wärmestrom zwischen dem Gaspaket und dem Plattenstapel sei proportional zur Temperaturdifferenz zwischen dem Paket und dem benachbarten Element des Stapels. Näherungsweise kann der Wärmefluss durch $\frac{dQ}{dt} = \beta V_0 (T_{\text{st}} - T_1) \cos(\omega t)$ beschrieben werden. T_1 und T_{st} sind die Amplituden der Temperaturoszillationen des Gaspakets und des benachbarten Plattenstapels der Aufgaben A.5 bzw. B.1. Die Änderung der Gastemperatur in Folge des Wärmeflusses (bei der Betriebsfrequenz der Maschine) kann vernachlässigt werden, da sie sehr klein gegenüber T_1 und T_{st} ist.

B.4	Um die Arbeit zu berechnen, betrachten wir die Änderung des Volumens eines sich bewegenden Gaspakets als Folge des thermischen Kontakts mit dem Plattenstapel. Setze den Druck und das Volumen des Gaspakets unter der Einwirkung des Plattenstapels folgendermaßen an: $$\begin{aligned} p &= p_0 + p_a \sin(\omega t) - p_b \cos(\omega t), \\ V &= V_0 + V_a \sin(\omega t) + V_b \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (6)$$ Finde die Koeffizienten V_a und V_b für gegebenes p_a und p_b. Drücke deine Antwort in Abhängigkeit von p_a, p_b, p_0, V_0, γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a und ℓ aus.	1.9pt

B.5	Berechne näherungsweise die akustische Arbeit pro Volumen, w, die das Gaspaket während eines Zyklus produziert. Integriere über das Volumen des Plattenstapels um die gesamte vom Gas verrichtete Arbeit W_{tot} während eines Zyklus zu erhalten. Drücke W_{tot} in Abhängigkeit von γ, τ, τ_{cr}, β, ω, a, k und D aus.	0.8pt

B.6	Berechne näherungsweise die Wärme Q_{tot}, die während eines Zyklus von der linken Seite der Querschnittsebene $x = x_0$ zur rechten transportiert wird. Drücke deine Antwort durch τ, τ_{cr}, β, ω, a, D, ℓ aus. (Hinweis: Für die Konvektionsrate (Wärmestrom durch Konvektion) gilt $j = Q\frac{du}{dt}$.)	0.8pt
B.7	Bestimme den Wirkungsgrad η der thermoakustischen Maschine. Der Wirkungsgrad ist definiert als das Verhältnis der generierten akustischen Arbeit zur Wärme, die dem heißen Reservoir entzogen wird. Drücke deine Antwort in Abhängigkeit der Temperaturdiffernz τ zwischen dem heißen und kalten Reservoir, der kritischen Temperaturdifferenz τ_{cr} und dem Carnot'schen Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - T_C/T_H$ aus.	0.6pt