Springende Kügelchen - ein Modell für Phasenübergänge und Instabilitäten (10 Punkte)

Bitte lies die allgemeinen Hinweise im separaten Umschlag, bevor du mit dieser Aufgabe startest.

Einleitung

Phasenübergänge sind vielfach aus dem Alltag bekannt, Wasser z.B. nimmt verschiedene Zustände wie fest, flüssig und gasförmig an. Diese verschiedenen Zustände werden durch Phasenübergänge getrennt, bei denen sich das kollektive Verhalten der beteiligten Moleküle ändert. Einem solchen Phasenübergang wird immer eine Übergangstemperatur zugeordnet, bei der die Zustandsänderung erfolgt, z.B. die Gefrier- und Siedetemperatur des Wassers in dem obigen Beispiel.

Phasenübergänge sind jedoch weiter verbreitet und treten auch in anderen Systemen auf, wie beispielsweise in Magneten oder Supraleitern. In diesen kann sich z.B. unterhalb einer Übergangstemperatur der makroskopische Zustand ändern, etwa von einem Paramagneten zu einem Ferromagneten bzw. von einem normalen Leiter zu einem Supraleiter.

Alle diese Übergänge können durch die Einführung eines Ordnungsparameter in ähnlicher Weise beschrieben werden. Der Ordnungsparameter im Magnetismus beschreibt zum Beispiel die Ausrichtung der magnetischen Momente der Atome in Bezug auf die makroskopische Magnetisierung.

In so genannten kontinuierlichen Phasenübergängen ist der Ordnungsparameter oberhalb der Übergangstemperatur immer Null. Unterhalb dieser Temperatur wächst er kontinuierlich, wie schematisch für einen Magneten in Abbildung 1 dargestellt. Die Übergangstemperatur wird in diesem Fall als kritische Temperatur bezeichnet. Die Abbildung enthält auch eine schematische Darstellung der mikroskopischen Ordnung beziehungsweise Unordnung im Falle eines Magneten. Dabei richten sich die einzelnen magnetischen Momente in dem ferromagnetischen Zustand parallel aus. Daraus resultiert eine makroskopische Magnetisierung. In der paramagnetischen Phase hingegen sind die einzelnen Momente zufällig angeordnet, was zu einer makroskopischen Magnetisieren von Null führt.

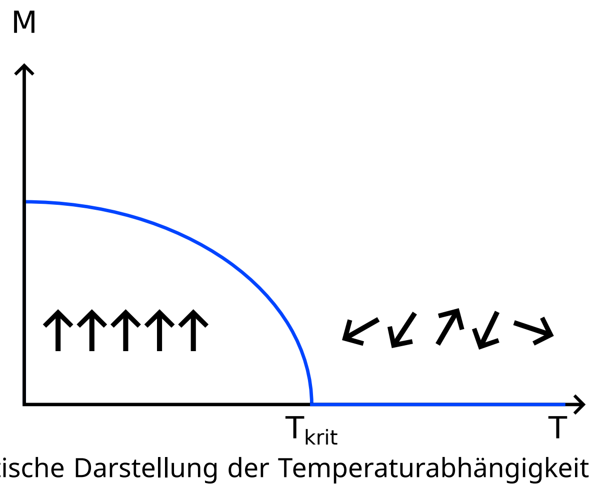

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Temperaturabhängigkeit des Ordnungsparameters M bei einem Phasenübergang. Unterhalb der kritischen Temperatur T_{krit}, wächst der Ordnungsparameter und ist grösser als Null. Für Temperaturen oberhalb von T_{krit} ist er gleich Null.

Im Allgemeinen folgt der Ordnungsparameter für kontinuierliche Phasenübergänge im Bereich des Phasenüberganges einem Potenzgesetz. Beim Magnetismus z.B. ist die Magnetisierung M unterhalb der kritischen Temperatur T_{krit} gegeben durch:

$$M \begin{cases} \sim (T_{\mathrm{krit}} - T)^b, & T < T_{\mathrm{krit}} \\ = 0, & T > T_{\mathrm{krit}} \end{cases}, \tag{1}$$

wobei T die Temperatur ist. Dieses Verhalten ist erstaunlicherweise universell: der Exponent nimmt für viele Phasenübergänge denselben Wert an.

Aufgaben

Du wirst an einem einfachen Beispiel einige Eigenschaften von kontinuierlichen Phasenübergängen untersuchen. Du wirst untersuchen, wie eine Instabilität zu einem kollektiven Verhalten von Kügelchen, und dadurch zum Phasenübergang, führen kann. Außerdem wirst du analysieren, wie eine makroskopische Veränderung von der Anregung der Kügelchen abhängt.

In normalen Phasenübergängen wird diese Anregung in der Regel durch die Temperatur gesteuert. In unserem werden die Kügelchen durch einen Lautsprecher beschleunigt und damit angeregt. Sie erhalten eine kinetische Energie. Die makroskopische Veränderung, die dem zu untersuchenden Phasenübergang entspricht, ist die Umverteilung der Kügelchen in eine Hälfte eines Zylinders, der durch eine kleine Wand getrennt ist.

Wenn du die Amplitude über den Bereich, in welchem die Teilchen sich in eine der Hälften sortieren, erhöhst, wirst du feststellen, dass sich alle Kügelchen gleichmäßig über beide Hälften verteilen. Dies entspricht einem Erhitzen über die kritische Temperatur.

Dein Ziel ist es, den kritischen Exponenten für den hier zu untersuchenden Modellphasenübergang zu bestimmen.

Materialliste

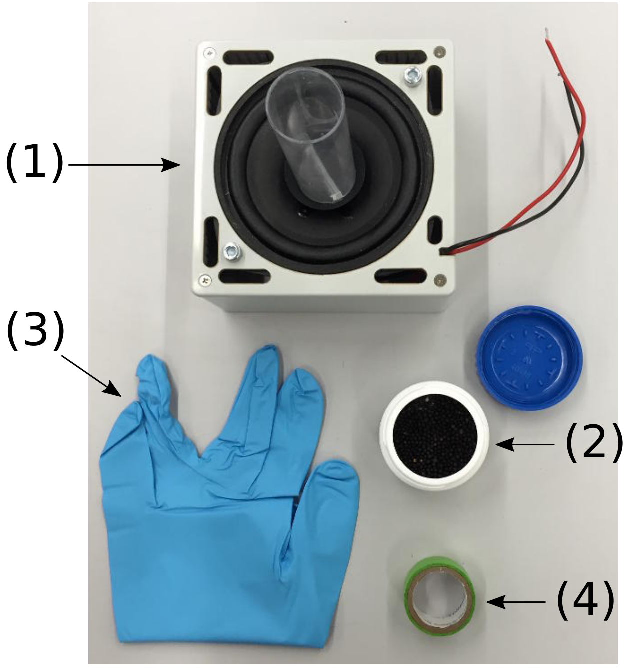

Abbildung 2: Zusätzliches Material für dieses Experiment.

1. Lautsprecheraufbau mit daran befestigtem Plastikzylinder
2. Zirca 100 pflanzliche Samen (in einem Kunststoffbehälter)
3. Ein Handschuh
4. Klebeband

Wichtige Vorkehrungen

- Drücke nicht zu stark seitlich gegen den Kunststoffzylinder. Im Falle einer gerissenen Lautsprechermembran oder eines beschädigten Plastikzylinders gibt es keinen Ersatz.
- Schalte den Lautsprecher ab, wenn du diesen nicht benötigst, um einer unnötigen Entladung der Batterie vorzubeugen.
- für dieses Experiment wird ein ausgehendes $4\ \mathrm{Hz}$ Sägezahnsignal an den Lautsprechereingang geliefert, welcher sich an der Seite des Funktionsgenerators befindet.
- Die Amplitude des Sägezahnsignals kann mit dem rechten Potentiometer eingestellt werden, welche mit *speaker amplitude* (4) beschriftet ist. Eine Gleichspannung proportional zu der Signalamplitude wird an der Amplitudenmonitorbuchse ausgegeben (6) (mit Referenz auf die *GND*-Buchse (7)). Die Zahlen beziehen sich auf die Abb. 2 in den allgemeinen Hinweisen.
- Die Lautsprechermembran ist empfindlich. Drücke weder seitlich noch von oben auf den Zylinder!

Teil A. Kritische Anregungsamplitude (3,3 Punkte)

Bevor du mit den eigentlichen Aufgaben dieses Problems beginnst, verbinde den Lautsprecher mit den Anschlüssen an der Seite des Funktionsgenerators (achte auf die korrekte Polarität). Lege einige Samen (ca. 50) in den Zylinder auf dem Lautsprecher. Verwende ein ausgeschnittenes Stück des bereitgestellten Handschuhs zum Verschließen des Zylinders, damit die Samen im Zylinder bleiben. Schalte die Anregung mit dem Kippschalter an und stelle die Amplitude mit dem rechten Potenziometer (beschriftet mit *speaker amplitude (4)*) mit Hilfe des bereitgestellten Schraubendrehers ein. Beobachte nun die Umverteilung der Kügelchen bei unterschiedlichen Amplituden.

Bestimme als erste Aufgabe die kritische Anregungsamplitude des Phasenübergangs. Um dies zu tun, musst du die Anzahl der Kügelchen N_1 und N_2 in den beiden Kammern in Abhängigkeit von der angezeigten Amplitude A_D messen. Wähle dabei stets $N_1 \leq N_2$. Die angezeigte Amplitude ist gleich der gemessenen Spannung am Ausgang *speaker amplitude* (6). Diese Spannung ist proportional zu der Amplitude des Sägezahnsignals, welches den Lautsprecher antreibt. Führe pro Spannungswert mindestens fünf Messungen durch.

Hinweis:

- Um die Dynamik der Kügelchen zu studieren, untersuche nur angezeigte Amplituden von mehr als $0.7\ \mathrm{V}$. Beginne damit, das Verhalten des Systems zu beobachten, indem du die Spannung langsam ohne Zählen der Samen variierst. Es kann passieren, dass einige Samen aufgrund von Elektrostatik am Boden kleben bleiben. Zähle diese nicht mit.

A.1	Nimm Werte auf für die Kügelchenanzahlen N_1 und N_2 in beiden Hälften des Behälters für verschiedene Amplituden A_D und notiere diese in **Tabelle A.1**.	1.2pt

A.2	Berechne die Standardabweichung deiner Messungen von N_1 und N_2 und notiere deine Ergebnisse in **Tabelle A.1**. Trage nun die erhaltenen Werte von N_1 und N_2 einschließlich ihrer Unsicherheiten als Funktion der angezeigten Amplitude A_D in **Graph A.2** ein.	1.1pt

A.3	Bestimme mit Hilfe des Graphen die kritische angezeigte Amplitude $A_{D,\mathrm{krit}}$ bei der sich ein Gleichgewicht zwischen N_1 und N_2 einstellt ($N_1 = N_2$).	1pt

Teil B. Kalibration (3,2 Punkte)

Die angezeigte Amplitude A_D ist proportional zur angelegten Spannung am Lautsprecher. Die physikalisch interessante Größe ist aber die maximale Auslenkung A des oszillierenden Lautsprechers. Diese Auslenkung A ist ein Maß dafür, wie stark die Kügelchen angeregt werden. Darum muss die angezeigte Amplitude kalibriert werden. Dafür kannst du jegliches bereitgestellte Material verwenden.

B.1	Skizziere deinen Aufbau zum Messen der Anregungsamplitude, d.h. der maximalen Auslenkung A (in mm) des Lautsprechers in einer Schwingungsperiode.	0.5pt

B.2	Bestimme die Amplitude A in mm für eine angemessene Anzahl von Messpunkten. Trage dann die Werte für die Amplitude A als Funktion der angezeigten Amplitude A_D in **Tabelle B.2** ein. Gib die Messunsicherheiten für Deine Messungen an.	0.8pt

B.3	Zeichne Deine Daten mit den Messunsicherheiten in **Graph B.3** ein.	1.0pt

B.4	Bestimme die Parameter eines geeigneten Fits Deiner Daten zur Bestimmung der Kalibrierungsfunktion $A(A_D)$.	0.8pt

B.5	Bestimme nun die kritische Anregungsamplitude A_{krit} der Kügelchen.	0.1pt

Teil C. Der kritische Exponent (3,5 Punkte)

In unserem System entspricht die Temperatur der durch die Anregung eingebrachten kinetischen Energie. Diese Energie ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit des Lautsprechers, d.h. es gilt $v^2 = A^2 f^2$, wobei f die Frequenz der Oszillation des Lautsprechers ist. Wir werden nun diese Abhängigkeit testen und den Exponenten b im Potenzgesetz (siehe Gleichung 1) berechnen, durch die das Verhalten des Ordnungsparameters beschrieben wird.

C.1	Der Term $\lvert\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\rvert$ für die Unausgeglichenheit der Kügelchen ist ein guter Kandidat für den Ordnungsparameter in unserem System. Dieser wird Null oberhalb der kritischen Amplitude und 1 bei geringen Anregungen. Bestimme diesen Ordnungsparameter als Funktion der Amplitude A. Notiere Deine Ergebnisse in **Tabelle C.1**.	1.1pt

C.2	Zeichne die Unausgeglichenheit $\left\lvert\frac{N_1-N_2}{N_1+N_2}\right\rvert$ als Funktion von $\lvert A_{\text{krit}}^2 - A^2\rvert$ in dem doppelt-logarithmischen **Graph C.2**. Du kannst **Tabelle C.1** für Deine Berechnungen nutzen. Es kann sein, dass die Datenpunkte in dem Graphen keinem linearen Verlauf zu folgen scheinen. Verwende zur Bestimmung des kritischen Exponenten dennoch eine lineare Näherung.	1pt

C.3	Bestimme den Exponenten b und schätze dessen Fehler ab.	1.4pt