

Einleitung

In dieser Aufgabe wird die Eisdecke Grönlands, die den zweitgrößten Gletscher der Welt darstellt, untersucht (Abb. 3.1(a)). Idealisiert wird Grönland in dieser Aufgabe als rechteckige Insel mit einer Breite von $2L$ und einer Länge von $5L$ angenommen. Die Insel sei komplett mit inkompressiblem Eis einer konstanten Dichte ρ_{ice} bedeckt (Abb. 3.1(b)) und der Boden befinde sich auf Meereshöhe. Das Höhenprofil $H(x)$ wird als unabhängig von der y -Koordinate angenommen und nimmt von Null an der Küste bei $x = \pm L$ bis zu einer maximalen Höhe H_m bei der Mittelachse (der y -Achse), die auch Eisscheide genannt wird, zu (vgl. Abb. 3.1(c)).

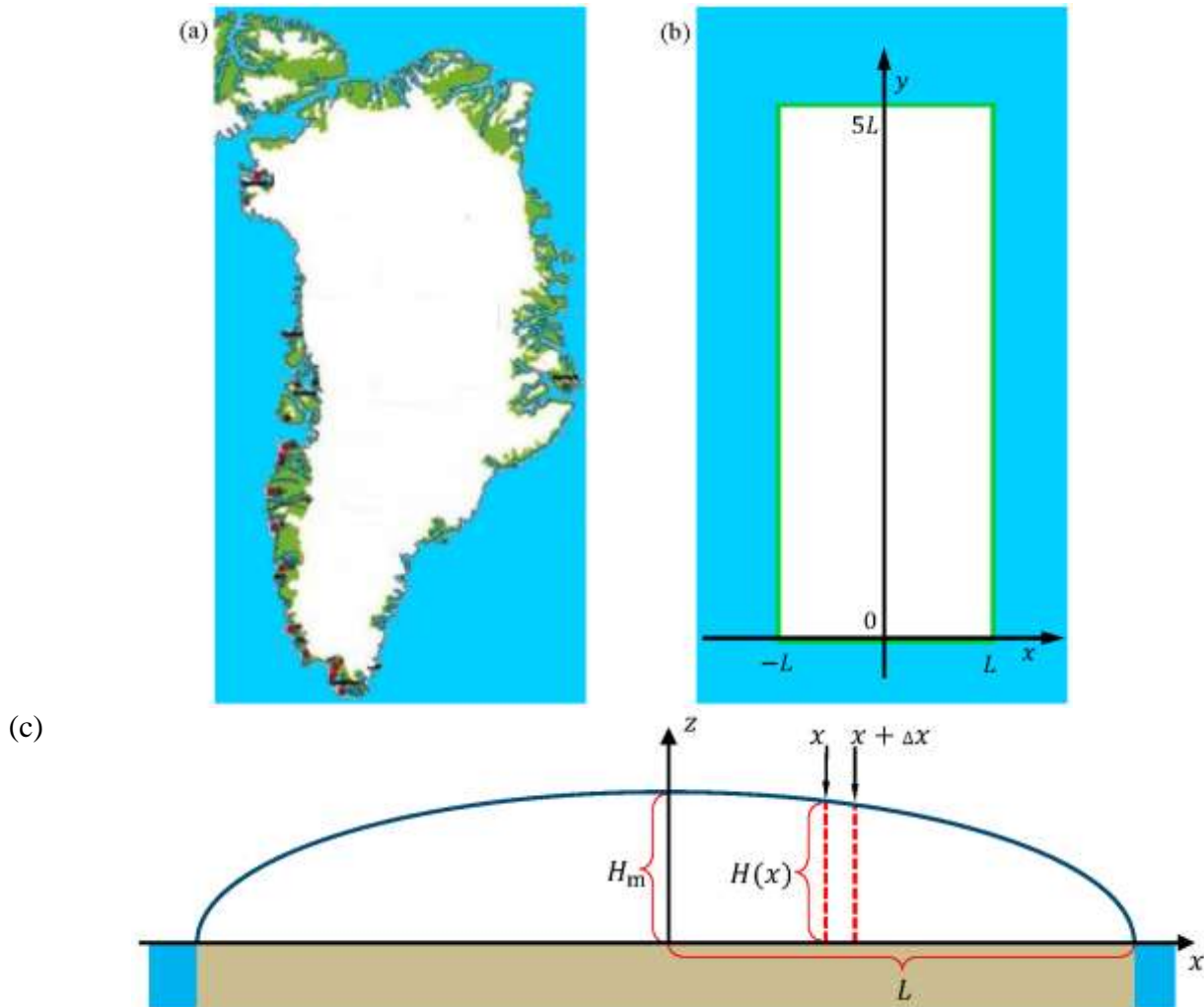


Abb 3.1 (a) Karte von Grönland mit Eisdecke (weiß), der eisfreien Küstenregionen (grün) und dem umgebenden Ozean (blau). (b) Grobes Modell der Eisdecke als rechteckige Fläche in der xy -Ebene mit Seitenlängen $2L$ und $5L$. Die Eisscheide, bei der die Eisdeckendicke den Maximalwert H_m annimmt, verläuft entlang der y -Achse. (c) Ein vertikaler Schnitt (in der xz -Ebene) durch die Eisdecke zeigt das Höhenprofil $H(x)$ (blaue Linie). $H(x)$ ist unabhängig von der y -Koordinate für $0 < y < 5L$ und fällt bei $y = 0$ sowie $y = 5L$ abrupt auf Null ab. Die z -Achse markiert die Position der Eisscheide. Zur Verdeutlichung sind die vertikalen Abmessungen überhöht dargestellt. Die Dichte ρ_{ice} des Eises ist konstant.

Zwei vielleicht nützliche Formeln

In dieser Aufgabe kann das folgende Integral benutzt werden:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

Für $|ax| \ll 1$ kann außerdem verwendet werden, dass $(1+x)^a \approx 1+ax$ ist.

Das Höhenprofil der Eisdecke

Auf kurzen Zeitskalen kann der Gletscher als inkompressibles hydrostatisches System mit einem festen Höhenprofil $H(x)$ modelliert werden.

3.1	Ermittle einen Ausdruck für den Druck $p(x, z)$ in der Eisdecke als Funktion der vertikalen Höhe z über dem Boden und dem Abstand x von der Eisscheide. Vernachlässige dabei den Atmosphärendruck.	0,3
-----	--	-----

Betrachte eine vertikale Schicht der Eisdecke, die sich im Gleichgewicht befindet und eine kleine, horizontale Bodenfläche der Größe $\Delta x \Delta y$ zwischen x und $x + \Delta x$ bedeckt (vgl. die gestrichelten Linien in Abb. 3.1 (c)). Die Größe von Δy spielt dabei keine Rolle. Die Differenz der Eisdeckendicke auf der inneren Seite und der der Küste zugewandten Seite der Eisschicht führt insgesamt zu einer in horizontale Richtung wirkenden Kraft ΔF auf die Schicht. Diese wird durch eine Reibungskraft der Größe $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ ausgeglichen, wobei $S_b = 100$ kPa ist.

3.2a	Zeige, dass für einen gegebenen Abstand x von der Eisscheide im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ gilt: $S_b = k H dH/dx$. Bestimme die Proportionalitätskonstante k .	0,9
3.2b	Ermittle einen Ausdruck für das Höhenprofil $H(x)$ und drücke $H(x)$ durch $\rho_{\text{ice}}, g, L, S_b$ sowie den Abstand x von der Eisscheide aus. Als Ergebnis ergibt sich, dass die maximale Eisdeckendicke H_m und die halbe Breite L gemäß $H_m \sim L^{1/2}$ zusammen hängen.	0,8
3.2c	Das Eisvolumen V_{ice} der Eisdecke hängt mit der Fläche A der rechteckigen Insel gemäß $V_{\text{ice}} \sim A^\gamma$ zusammen. Bestimme den Exponenten γ .	0,5

Eine dynamische Eisdecke

Auf längeren Zeitskalen verhält sich das Eis wie eine viskose inkompressible Flüssigkeit, die durch den Einfluss der Gravitation aus dem mittleren Inselteil zur Küste fließt. In dem untersuchten Modell behält die Eisdecke ihr Höhenprofil $H(x)$ bei, indem der in der zentralen Region fallende Schnee durch das Abschmelzen an der Küste ausgeglichen wird. Triff zusätzlich zu der in Abb. 3.1(b) und (c) beschriebenen Geometrie die folgenden Modellannahmen:

- 1) Das Eis fließt nur in der xz -Ebene von der Eisscheide (der y -Achse) weg.
- 2) Die Eisbildungsrate c (m/Jahr) in der Zentralregion ist konstant.
- 3) Der Gletscher verliert Eis lediglich durch Abschmelzen an den Küsten bei $x = \pm L$.
- 4) Die horizontale (x -)Komponente $v_x(x) = dx/dt$ der Eisflussgeschwindigkeit ist unabhängig von z .
- 5) Die vertikale (z -)Komponente $v_z(z) = dz/dt$ der Eisflussgeschwindigkeit ist unabhängig von x .

Betrachte ausschließlich die zentrale Region mit $|x| \ll L$ in der Nähe der Eisscheide, bei der die Dicke der Eisschicht als etwa konstant angenommen werden kann, d.h. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Verwende die Massenerhaltung, um einen Ausdruck für die horizontale Eisflussgeschwindigkeit $v_x(x)$ herzuleiten. Drücke diese durch c , x und H_m aus.	0,6
-----	---	-----

Aus der angenommenen Inkompressibilität des Eises, d.h. aus dessen konstanter Dichte ρ_{ice} , folgt mit Hilfe der Massenerhaltung für die Eisflussgeschwindigkeitskomponenten

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Bestimme einen Ausdruck, wie die vertikale Eisfluss-Geschwindigkeitskomponente $v_z(z)$ von z abhängt.	0,6
-----	--	-----

Ein kleines Eisteilchen, das sich anfänglich an der Oberfläche bei (x_i, H_m) befindet, bewegt sich als Teil der Eisdecke mit der Zeit entlang einer (Fließ-)Bahn $z(x)$ in der vertikalen xz -Ebene.

3.5	Bestimme einen Ausdruck $z(x)$ für eine solche (Fließ-)Bahn.	0,9
-----	--	-----

Alter und Klimaindikatoren in einer dynamischen Eisdecke

Mit Hilfe der Eisflussgeschwindigkeitskomponenten $v_x(x)$ und $v_z(z)$ lässt sich das Alter $\tau(z)$ von Eis in einer bestimmten Tiefe $H_m - z$ unter der Eisoberfläche bestimmen.

3.6	Betrachte die Eisschicht direkt an der Eisscheide, also bei $x = 0$. Bestimme einen Ausdruck für das Alter $\tau(z)$ des Eises als Funktion der Höhe z über dem Boden.	1,0
-----	---	-----

Ein Eisbohrkern, der im Inneren von Grönland gebohrt wird, durchstößt Schichten mit Eis, das vor langer Zeit entstanden ist. Die Bohrkerne werden analysiert, um Aufschlüsse über frühere Klimaveränderungen zu erhalten. Einer der besten Indikatoren ist die Größe $\delta^{18}O$ mit

$$\delta^{18}O := \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}} 1000 \text{ ‰}.$$

Hierbei bezeichnet $R = [^{18}O]/[^{16}O]$ die relative Häufigkeit der beiden stabilen Sauerstoffisotope ^{18}O und ^{16}O . Der Referenzwert R_{ref} basiert auf der Zusammensetzung der Ozeane am Äquator.

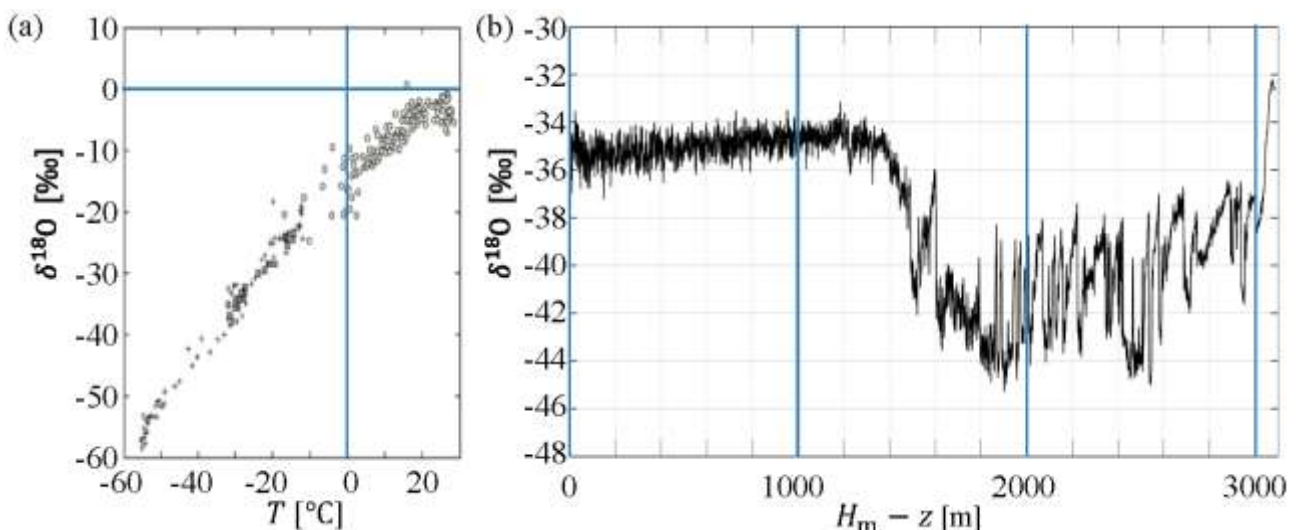


Abb 3.2 (a) Beobachteter Zusammenhang zwischen $\delta^{18}O$ in Schnee und der durchschnittlichen jährlichen Oberflächentemperatur T . (b) Messungen von $\delta^{18}O$ über der Tiefe $H_m - z$ von der Oberfläche für einen Eisbohrkern, der an der grönländischen Eisscheide an einer Stelle mit $H_m = 3060$ m gewonnen wurde.

Untersuchungen der grönländischen Eisschicht zeigen, dass es einen etwa linearen Zusammenhang zwischen der Größe $\delta^{18}\text{O}$ im Schnee und der Temperatur gibt (Abb. 3.2(a)). Unter der Annahme, dass dies auch in früheren Zeiten so gewesen ist, liefert die für einen Eisbohrkern bei einer Tiefe $H_m - z$ bestimmte Größe $\delta^{18}\text{O}$ eine Abschätzung für die vor einer Zeit $\tau(z)$ in der Nähe Grönlands vorherrschende Temperatur T .

Messungen von $\delta^{18}\text{O}$ in einem 3060 m langen grönländischen Eisbohrkern zeigen eine abrupte Veränderung des $\delta^{18}\text{O}$ Wertes in einer Tiefe von etwa 1492 m, die das Ende der letzten Eiszeit markiert (Abb. 3.2(b)). Die Eiszeit begann vor etwa 120.000 Jahren, was einer Tiefe von 3040 m entspricht. Die aktuelle Zwischeneiszeit begann vor etwa 11.700 Jahren, was der Tiefe von 1492 m entspricht. Nimm an, dass diese beiden Zeitalter durch die beiden unterschiedlichen Eisbildungs-raten c_{ia} (Eiszeit) und c_{ig} (Zwischeneiszeit) beschrieben werden können. Es kann außerdem angenommen werden, dass H_m in dem betrachteten Zeitraum von 120.000 Jahren konstant ist.

3.7a	Bestimme die Eisbildungsraten c_{ia} und c_{ig} .	0,8
3.7b	Verwende die Daten in Abb. 3.2, um die Temperaturänderung beim Übergang von der Eiszeit zur Zwischeneiszeit zu bestimmen.	0,2

Anstieg des Meeresspiegels durch das Schmelzen des Grönlandeises

Ein komplettes Abschmelzen des Grönlandeises würde einen globalen Anstieg des Meeresspiegels nach sich ziehen. Für eine grobe Abschätzung dieses Anstiegs kann man einen gleichmäßigen Anstieg des Meeresspiegels auf der gesamten Fläche der Ozeane ($A_O = 3,61 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$) annehmen.

3.8	Berechne den mittleren Anstieg des Meeresspiegels, der sich aus dem kompletten Abschmelzen der grönländischen Eisdecke ergeben würde. Die Fläche der Eisdecke beträgt aktuell $A_G = 1,71 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$ und $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0,6
-----	--	-----

Die massive grönländische Eisdecke übt eine gravitative Anziehung auf den umgebenden Ozean aus, die zu einer Erhöhung des Wasserspiegels führt. Wenn das Eis schmilzt, fällt dieser Einfluss weg und der Meeresspiegel um Grönland sinkt. Dieser Effekt wirkt dem oben bestimmten Meeresspiegelanstieg entgegen.

Um die Größenordnung dieses gravitativen Effektes abzuschätzen, wird die grönländische Eisdecke nun als Punktmasse auf Meereshöhe modelliert, deren Masse der des gesamten grönländischen Eises entspricht. Kopenhagen ist etwa 3500 km entlang der Erdoberfläche von dieser Punktmasse entfernt. Die Erde kann ohne die Punktmasse als kugelförmig und vollständig von einem globalen Ozean mit der Fläche $A_E = 5,10 \times 10^{14} \text{ m}^2$ bedeckt angenommen werden. Alle Effekte, die von der Rotation der Erde herrühren, sollen ebenfalls nicht berücksichtigt werden.

3.9	Bestimme die sich im Rahmen dieses Modells ergebende Differenz $h_{CPH} - h_{OPP}$ der Wasserspiegel in Kopenhagen (h_{CPH}) und dem Ort, der auf der Erde Grönland diametral gegenüberliegt (h_{OPP}).	1,8
-----	---	-----