Einleitung

Diese Aufgabe behandelt einen effizienten Prozess zur Dampferzeugung, der bereits experimentell bestätigt wurde. Eine wässrige Suspension sphärischer nanometer-großer Silberpartikel (Nanopartikel) mit nur etwa 10^{13} Partikeln pro Liter wird mit einem gebündelten Lichtstrahl beleuchtet. Die Nanopartikel absorbieren einen Teil des Lichts, erhitzen sich und erzeugen in ihrer unmittelbaren Umgebung Dampf, ohne die gesamte Flüssigkeit zu erhitzen. Der Dampf entweicht als Bläschen. Der Vorgang ist noch nicht komplett verstanden; der zugrundeliegende Prozess, die Absorption von Licht durch kollektive Elektronenoszillation, die sogenannte elektrische Plasmonen-Oszillation der metallischen Nanopartikel, ist jedoch bekannt. Die Anordnung wird plasmonischer Dampferzeuger genannt.

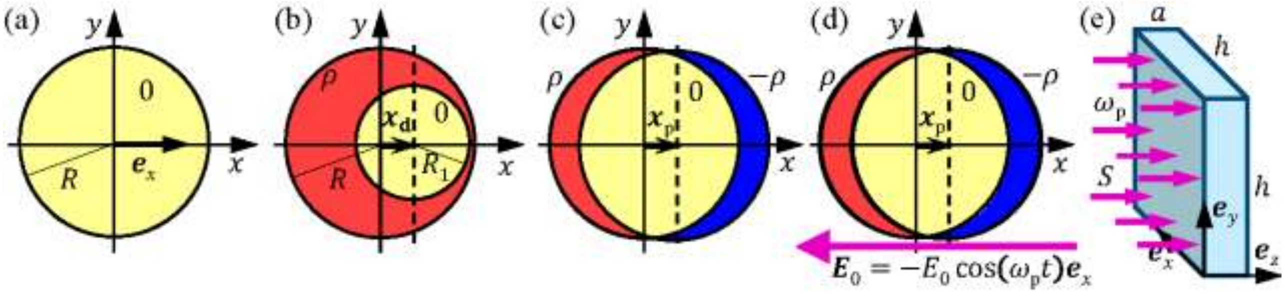

Abbildung 2.1 (a) Ein kugelförmiges ungeladenes Nanopartikel mit Radius R im Ursprung des Koordinatensystems. **(b)** Eine Kugel mit homogener positiver Ladungsdichte ρ (rot) enthält einen kleineren kugelförmigen ungeladenen Bereich (0, gelb) mit Radius R_1 und Mittelpunkt bei $\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_x$. **(c)** Die Kugel mit der positiven Ladungsdichte ρ der Silberionen des Nanopartikels wird am Koordinatenursprung festgehalten. Die Mitte des kugelförmigen Bereichs mit negativer Ladungsdichte $-\rho$ (blau) der Elektronenwolke ist um $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ verschoben, wobei $x_\mathrm{p} \ll R$. **(d)** Äußeres homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$. Für zeitabhängige $\boldsymbol{E}_0$ bewegt sich die Elektronenwolke mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}_\mathrm{p}/\mathrm{d}t$. **(e)** Rechteckiges ($h \times h \times a$) Gefäß mit der wässrigen Nanopartikel-Suspension, beleuchtet durch monochromatisches Licht der Winkelfrequenz ω_p und Intensität S das sich entlang der z-Achse ausbreitet.

Einzelnes kugelförmiges Silber-Nanopartikel

In dieser Aufgabe habe ein kugelförmiges Silber-Nanopartikel den Radius $R = 10{,}0$ nm. Dessen Mitte befinde sich fest im Koordinatenursprung, wie in Abb. 2.1(a). Alle Bewegungen, Kräfte und antreibenden Felder sind parallel zur x-Achse (mit Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_x$) gerichtet. Das Nanopartikel enthält freie (Leitungs-)Elektronen, die sich durch das gesamte Nanopartikel bewegen, ohne an Silbe gebunden zu sein. Jedes Silberteilchen ist ein positives Ion, das genau ein solches freies Elektron abgegeben hat.

2.1	Bestimme die folgenden Größen: Das Volumen V und die Masse M des Nanopartikels, die Anzahl N und Ladungsdichte ρ der Silberionen in dem Partikel, sowie die Dichte n, Gesamtladung Q und Gesamtmasse m_0 der freien Elektronen.	0,7

Elektrisches Feld eines ungeladenen Bereichs im Inneren der geladenen Kugel

Für die weiteren Aufgaben kann angenommen werden, dass alle Materialien eine relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_r = 1$ besitzen. Im Inneren einer geladenen Kugel mit homogener Ladungsdichte ρ und Radius R wird durch eine entgegengesetzte Ladungsdichte $-\rho$ in Form einer kleinen Kugel mit Radius R_1, deren Mitte - wie in Abb. 2.1(b) dargestellt - um $\boldsymbol{x}_\mathrm{d} = x_\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_x$ gegenüber der Mitte der R-Kugel verschoben ist, ein elektrisch neutraler Bereich erzeugt.

2.2	Zeige, dass das elektrische Feld im Inneren des ungeladenen Bereichs homogen und von der Form $\boldsymbol{E} = A\,(\rho/\varepsilon_0)\,\boldsymbol{x}_\mathrm{d}$ ist. Bestimme den Koeffizienten A.	1,2

Rücktreibende Kraft auf die verschobene Elektronenwolke

Die Bewegung der freien Elektronen sei im Folgenden kollektiv, sodass die Elektronen als eine einzelne negativ geladene Kugel mit homogener Ladungsdichte $-\rho$ beschrieben werden, die sich entlang der x-Achse bewegen kann. Der Mittelpunkt dieser Kugel sei bei $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$, bezogen auf die Mitte der positiv geladenen Kugel (der Silberionen), welche wie in Abb. 2.1(c) am Koordinatenursprung festgehalten wird. Nimm an, dass eine externe Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ zu einer neuen Gleichgewichtslage der Elektronenwolke $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = x_\mathrm{p}\,\boldsymbol{e}_x$ mit $|x_\mathrm{p}| \ll R$ führt. Abgesehen von einem kleinen Ladungsüberschuss an den gegenüberliegenden Enden des Nanopartikels bleibt dessen Inneres überwiegend ungeladen.

2.3	Stelle folgende Größen in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}_\mathrm{p}$ und n dar: Die rücktreibende Kraft $\boldsymbol{F}$ auf die Elektronenwolke, sowie die bei der Verschiebung der Elektronenwolke an ihr verrichtete Arbeit W_el.	1,0

Kugelförmiges Silber-Nanopartikel in konstantem externen elektrischen Feld

Ein Nanopartikel sei im Vakuum einer externen Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ durch ein angelegtes statisches, homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E}_0 = -E_0\boldsymbol{e}_x$ ausgesetzt, die die Elektronenwolke um die kleine Strecke $|x_\mathrm{p}|$ verschiebt ($|x_\mathrm{p}| \ll R$).

2.4	Bestimme die Verschiebung x_p der Elektronenwolke in Abhängigkeit von E_0 und n, sowie die Ladungsmenge $-\Delta Q$ der Elektronen, die bei der Verschiebung die yz-Ebene durch den Mittelpunkt des Nanopartikels passieren, in Abhängigkeit von n, R und $\mathrm{x_p}$.	0,6

Äquivalente Kapazität und Induktivität des Silber-Nanopartikels

Sowohl für ein konstantes als auch für ein zeitabhängiges Feld $\boldsymbol{E}_0$ kann das Nanopartikel durch ein Ersatzschaltbild beschrieben werden. Die Ersatzkapazität kann gefunden werden, indem man die Arbeit W_el bei der Trennung der Ladungen ΔQ mit der Energie eines Kondensators, der die Ladung $\pm\Delta Q$ trägt, assoziiert. Die Ladungstrennung erzeugt eine Ersatzspannung V_0 über dem Ersatzkondensator.

2.5a	Bestimme die Ersatzkapazität C in Abhängigkeit von ε_0 und R und berechne den zugehörigen Zahlenwert.	0,7
2.5b	Bestimme für diese Ersatzkapazität in Abhängigkeit von E_0 und R die Ersatzspannung V_0 die an die Ersatzkapazität angelegt werden muss, um die Ladung ΔQ zu erreichen.	0,4

Für ein zeitabhängiges Feld $\boldsymbol{E}_0$ bewegt sich die Elektronenwolke mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_x$, vgl. Abb. 2.1(d). Sie hat die kinetische Energie W_{kin} und entspricht einem Strom I durch die feste yz-Ebene. Die kinetische Energie der Elektronenwolke kann der Energie einer Ersatz-Induktivität L, durch die der Strom I fließt, zugeordnet werden.

2.6a	Drücke W_{kin} und I in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v aus.	0,7
2.6b	Drücke die Ersatzinduktivität L in Abhängigkeit von dem Partikelradius R, der Elementarladung e, der Elektronenmasse m_e und der Elektronendichte n aus, und berechne deren Wert.	0,5

Plasmonenresonanz des Silber-Nanopartikels

Aus der vorherigen Betrachtung folgt, dass die Bewegung, die entsteht, wenn die Elektronenwolke aus der Gleichgewichtslage verschoben und losgelassen wird, durch die Resonanz eines idealen LC-Schwingkreises modelliert werden kann. Dieses charakteristische Verhalten der Elektronenwolke wird Plasmonenresonanz genannt. Die Kreisfrequenz dieser Oszillation ist die Plasmonenfrequenz ω_{p}.

2.7a	Finde einen Ausdruck für die Plasmonenfrequenz ω_{p} der Elektronenwolke in Abhängigkeit von der Elementarladung e, der Elektronenmasse m_e, der Elektronendichte n und der Dielektrizitätskonstanten ε_0.	0,5
2.7b	Berechne ω_{p} in rad/s und die Wellenlänge λ_{p} in nm, die Licht mit $\omega = \omega_{\text{p}}$ in Vakuum hätte.	0,4

Silber-Nanopartikel mit Licht der Plasmonenfrequenz bestrahlt

Für die weiteren Teilaufgaben wird das Nanopartikel mit monochromatischem Licht der Intensität $S = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 = 1.00\ \text{MW}\,\text{m}^{-2}$ und einer Kreisfrequenz ω_{p} gleich der Plasmonenfrequenz bestrahlt. Da die Wellenlänge groß ist, d.h. $\lambda_{\text{p}} \gg R$, kann man davon ausgehen, dass sich das Nanopartikel in einem homogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}_0$ befindet, dessen Feldstärke harmonisch oszilliert:
$\boldsymbol{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_{\text{p}} t)\,\boldsymbol{e}_x$. Angeregt durch $\boldsymbol{E}_0$ schwingt der Mittelpunkt der Elektronenwolke, $\boldsymbol{x}_{\text{p}}(t)$, mit der gleichen Frequenz und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \text{d}\boldsymbol{x}_{\text{p}}/\text{d}t$ bei konstanter Amplitude x_0. Diese oszillierende Elektronenbewegung führt zur Absorption von Licht. Die so aufgenommene Energie wird entweder in Joulesche Wärme umgewandelt oder als gestreutes Licht wieder emittiert.

Die Erwärmung wird durch zufällige inelastische Stöße hervorgerufen, bei denen freie Elektronen ein Silberion treffen und ihre komplette kinetische Energie verlieren, die in Vibrationen der Silberionen (d.h. Wärme) umgewandelt wird. Die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen ist $\tau \gg 1/\omega_{\text{p}}$. Für die Silber-Nanopartikel verwenden wir $\tau = 5{,}24 \cdot 10^{-15}$ s.

2.8a	Finde Ausdrücke für die mittlere Heizleistung P_{heat} in dem Nanopartikel, sowie die mittlere quadratische Stromstärke $\langle I^2 \rangle$,die die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\langle v^2 \rangle$ der Elektronenwolke explizit enthalten.	1,0

2.8b	Finde einen Ausdruck für den äquivalenten ohmschen Widerstand R_{heat} in einem Ersatzwiderstandsmodell, in dem im Nanopartikel aufgrund des Stroms I der Elektronenwolke eine Heizleistung P_{heat} entsteht. Berechne den numerischen Wert von R_{heat}.	1,0

Der einfallende Lichtstrahl verliert die mittlere Leistung P_{scat} durch Streuung an der oszillierenden Elektronenwolke (Re-Emission). P_{scat} hängt von der Quelle der Streuung (Amplitude x_0, Ladung Q, und Winkelfrequenz ω_{p}) und den Eigenschaften des Lichts (Lichtgeschwindigkeit c and Dielektrizitätskonstante im Vakuum ε_0) ab. In Abhängigkeit von diesen Größen ist P_{scat} gegeben durch: $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_{\text{p}}{}^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$.

2.9	Finde mithilfe von P_{scat} einen Ausdruck für den Ersatzwiderstand für die Streuung R_{scat} (analog zu R_{heat}) in einem Ersatzwiderstandsmodell und berechne dessen Wert.	1,0

Die berechneten Elemente des Ersatzschaltkreises werden für ein Modell des Nanopartikels zu einem Serien-LCR-Kreis zusammengesetzt. Dieser wird angetrieben von einer harmonischen Ersatzspannung $V = V_0 \cos(\omega_{\text{p}} t)$, die durch das elektrische Feld E_0 des einfallenden Lichts festgelegt ist.

2.10a	Leite Ausdrücke für die mittleren Verlustleistungen P_{heat} und P_{scat} her, welche die Amplitude E_0 des elektrischen Felds des einfallenden Lichts bei der Plasmonenresonanz $\omega = \omega_p$ beinhalten.	1,2
2.10b	Berechne numerische Werte für E_0, P_{heat}, and P_{scat}.	0,3

Dampferzeugung mit Licht

Eine wässrige Suspension von Silber-Nanopartikeln mit einer Konzentration von

$n_{\text{np}} = 7{,}3 \cdot 10^{15}\ \text{m}^{-3}$ befindet sich in einem quaderförmigen transparenten Gefäß mit den Abmessungen $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0\ \text{cm}^3$. Sie wird mit Licht bei der Plasmonfrequenz und der gleichen Intensität $S = 1{,}00\ \text{MW m}^{-2}$ senkrecht beleuchtet, wie in Abb. 2.1(e). Die Temperatur des Wassers ist $T_{\text{wa}} = 20\ ^\circ\text{C}$, und wir nehmen (in guter Übereinstimmung mit Beobachtungen) an, dass im stationären Zustand die komplette Joulesche Wärme der Nanopartikel zur Produktion von Dampf der Temperatur $T_{\text{st}} = 110\ ^\circ\text{C}$ aufgewendet wird, ohne die Temperatur des übrigen Wassers zu erhöhen.

Der thermodynamische Wirkungsgrad η des plasmonischen Dampferzeugers ist als Verhältnis der Leistungen $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$ definiert, mit P_{st} als Leistung die zur Dampferzeugung aufgewendet wird, und P_{tot} der gesamten Leistung des Lichts, das auf das Gefäß trifft.

Jedes einzelne Nanopartikel ist die meiste Zeit komplett von Dampf, nicht flüssigem Wasser, umgeben und kann daher als im Vakuum betrachtet werden.

2.11a	Berechne die resultierende Massenrate μ_{st} des mit dem Dampfgenerator erzeugten Dampfes, wenn dieser mit Licht bei der Plasmonfrequenz und der Intensität S bestrahlt wird.	0,6
2.11b	Berechne den numerischen Wert des thermodynamischen Wirkungsgrads η des Dampfgenerators.	0,2