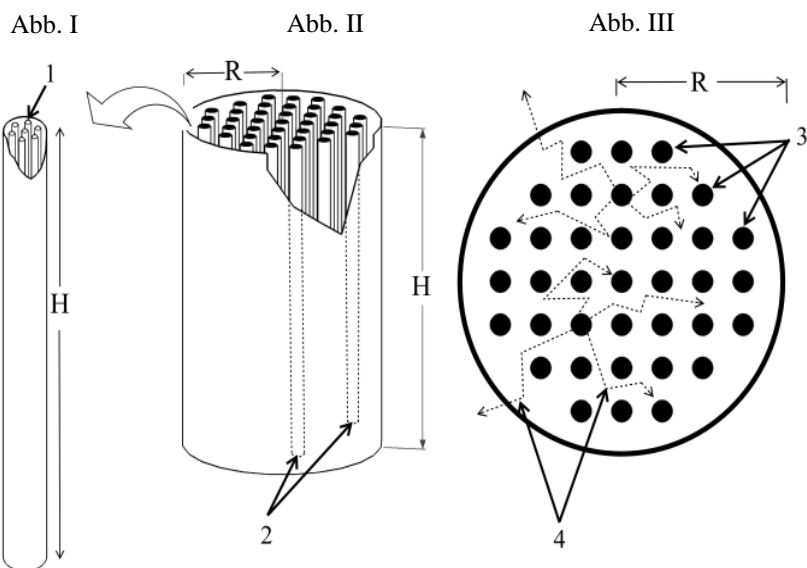


Das Design eines Kernreaktors

(Gesamtpunkte: 10)

Uran kommt in der Natur als  $UO_2$  vor. Lediglich 0,720% der Uranatome sind  $^{235}U$ , das sich, induziert durch Neutronen, leicht spalten lässt. Bei der Kernspaltung eines  $^{235}U$ -Kerns werden 2-3 Neutronen mit hoher kinetischer Energie frei. Die Kernspaltung tritt häufiger auf, wenn die Neutronen, die zur Spaltung beitragen, eine geringere kinetische Energie haben. Durch Reduzierung der kinetischen Energie der Spaltungsneutronen kann daher eine Kettenreaktion in anderen  $^{235}U$ -Kernen hervorgerufen werden. Dies ist die Grundlage für die Energiegewinnung in einem Kernreaktor (KR).

Ein typischer KR besteht aus einem zylindrischen Behälter der Höhe  $H$  und dem Radius  $R$ , der mit einem Material gefüllt ist, welches man Moderator nennt. Zylindrische Röhren, Brennstoffstäbe genannt, enthalten jeweils kleinere Zylinder (*Fuel Pins*) der Höhe  $H$ , die eine Menge natürlichen  $UO_2$  in fester Form enthalten. Die Brennstoffstäbe sind in einem axialen, quadratischen Feld angeordnet. Spaltungsneutronen, die aus einem Brennstoffstab entweichen, stoßen mit den Atomen des Moderators zusammen. Dabei verlieren sie Energie und erreichen andere Brennstoffstäbe mit einer kinetischen Energie, die klein genug ist, um erneut zu einer Kernspaltung zu führen (Abb. I-III). Die bei der Kernspaltung erzeugte Wärme wird über ein Kühlmittel abgeführt, das entlang der Achse der Brennstäbe fließt. In der vorliegenden Aufgabenstellung erhältst Du Einblicke in die Physik hinter den (A) Fuel Pins, (B) Moderator und (C) Aufbau des KR mit einer zylindrischen Geometrie.



*Schematische Skizze eines Kernreaktors (KR)*  
 Abb. I: Vergrößerung eines Brennstoffstabes (1: *Fuel Pin*)  
 Abb. II: Ansicht des KR (2: *Brennstoffstäbe*)  
 Abb. III: Draufsicht des KR (3: *Quadratische Anordnung der Brennstoffstäbe* und 4: *Typische Bahn der Neutronen*).  
 Es sind nur Komponenten gezeigt, die für die Bearbeitung der Aufgaben wichtig sind. Z.B. wurden die Kontrollstäbe und die Kühlflüssigkeit weggelassen.

A Brennstoffstäbe

Daten für $UO_2$	1. Molare Masse $M_w = 0,270 \text{ kg mol}^{-1}$	2. Dichte $\rho = 1,060 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
	3. Schmelzpunkt $T_m = 3,138 \times 10^3 \text{ K}$	4. Thermische Leitfähigkeit $\lambda = 3,280 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$

A1	<p>Betrachte die folgende Kernspaltung eines ruhenden <math>^{235}U</math>-Kerns. Der Kern hat ein Neutron absorbiert, welches eine vernachlässigbare kinetische Energie hatte.</p> $^{235}U + ^1_0n \rightarrow ^{94}Zr + ^{140}Ce + 2 ^1_0n + \Delta E$ <p>Bestimme <math>\Delta E</math> (in MeV), die gesamte freigesetzte Spaltungsenergie. Benutze dabei folgende Massen: <math>m(^{235}U) = 235,044 \text{ u}</math>; <math>m(^{94}Zr) = 93,9063 \text{ u}</math>; <math>m(^{140}Ce) = 139,905 \text{ u}</math>; <math>m(^1_0n) = 1,00867 \text{ u}</math>. Dabei ist <math>1 \text{ u} = 931,502 \text{ MeV } c^{-2}</math>. Vernachlässige die Ladungungleichheit auf beiden Seiten.</p>	0,8
A2	Bestimme $N$ , die Anzahl von $^{235}U$ -Atomen pro Volumseinheit in natürlichem $UO_2$ .	0,5
A3	<p>Nimm nun eine konstante Neutronenflussdichte von <math>\phi = 2,000 \times 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}</math> auf den Brennstoff an. Der Wirkungsquerschnitt (die effektive Einfangfläche eines Zielkerns) eines <math>^{235}U</math> für die Kernspaltung beträgt <math>\sigma_f = 5,400 \times 10^{-26} \text{ m}^2</math>. Nimm weiterhin an, dass 80,00% der freigesetzten Spaltungsenergie als Wärme verfügbar sind. Bestimme <math>Q</math> (in <math>\text{W m}^{-3}</math>), die Rate der Wärmeerzeugung in einem Fuel Pin pro Volumeneinheit. <math>1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}</math></p>	1,2

A4	Der sich im Betrieb einstellende Temperaturunterschied zwischen dem Zentrum ( $T_c$ ) und der Mantelfläche ( $T_s$ ) des Fuel Pins kann ausgedrückt werden als $T_c - T_s = k F(Q, a, \lambda)$ . Hierbei ist $k = 1/4$ , eine dimensionslose Konstante und $a$ der Radius eines Fuel Pins. Leite $F(Q, a, \lambda)$ durch eine Dimensionsanalyse her. Beachte, dass $\lambda$ die Wärmeleitfähigkeit von $\text{UO}_2$ ist.	0,5
A5	Die gewünschte Temperatur des Kühlmittels beträgt $5,770 \times 10^2$ K. Bestimme damit das obere Limit $a_u$ für den Radius $a$ eines Fuel Pins.	1,0

**B Der Moderator**

Betrachte den Stoß eines Neutrons der Masse  $1 \text{ u}$  mit einem Moderatoratom der Masse  $A \text{ u}$  in zwei Dimensionen. Die Moderatoratome werden im Laborsystem (LS) vor dem Stoß als ruhend angenommen. Bezeichne mit  $\vec{v}_b$  und  $\vec{v}_a$  die Geschwindigkeiten des Neutrons im LS vor (*before*) bzw. nach (*after*) der Kollision.  $\vec{v}_m$  sei die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems (SPS) relativ zum LS und  $\theta$  der Streuwinkel des Neutrons im SPS. Alle Teilchen bewegen sich dabei mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten.

B1	<p>Abb. IV zeigt schematisch den Stoß im LS mit dem entsprechenden Streuwinkel <math>\theta_L</math>. Zeichne eine Skizze des Stoßes im SPS. Trage die Geschwindigkeiten der Teilchen 1, 2 und 3 ausgedrückt durch <math>\vec{v}_b</math>, <math>\vec{v}_a</math> und <math>\vec{v}_m</math> ein. Zeichne außerdem den Streuwinkel <math>\theta</math> ein.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p style="text-align: center;"><i>Stoß im Laborsystem</i></p> <p>1-Neutron vor dem Stoß 2-Neutron nach dem Stoß 3-Moderatoratom vor dem Stoß 4-Moderatoratom nach dem Stoß</p> </div>	1,0
B2	Bestimme $v$ und $V$ , die Geschwindigkeiten des Neutrons und des Moderatoratoms nach dem Stoß im SPS und drücke diese durch $A$ und $v_b$ aus.	1,0
B3	Leite einen Ausdruck für $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ ab, wobei $E_b$ und $E_a$ die kinetischen Energien des Neutrons im LS vor bzw. nach dem Stoß sind und $\alpha$ definiert ist durch $\alpha \equiv [(A - 1) / (A + 1)]^2$	1,0
B4	Nimm an, dass der obige Ausdruck für $\text{D}_2\text{O}$ gültig ist. Berechne welcher Anteil $f_l \equiv \frac{E_b - E_a}{E_b}$ der Energie des Neutrons vor dem Stoß maximal bei dem Stoß mit $\text{D}_2\text{O}$ ( $m = 20 \text{ u}$ ) als Moderator verloren gehen kann.	0,5

**C Der Kernreaktor**

Um einen Kernreaktor (KR) mit einem konstanten Neutronenfluss  $\psi$  zu betreiben (stabiler Betrieb), müssen austretende Neutronen durch einen Produktionsüberschuss an Neutronen im Reaktor ausgeglichen werden. Bei einem KR mit zylindrischer Geometrie lässt sich die Rate austretender Neutronen (Leckrate) ausdrücken durch  $k_1 [(2,405/R)^2 + (\pi/H)^2] \psi$  und der Neutronenüberschuss beträgt  $k_2 \psi$ . Die Konstanten  $k_1$  and  $k_2$  hängen von den Materialeigenschaften des KR ab.

C1	Betrachte einen KR mit $k_1 = 1,021 \times 10^{-2} \text{ m}$ und $k_2 = 8,787 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ . Bestimme die Abmessungen des KR bei stabilem Betrieb durch eine Minimierung der Leckrate bei festem Volumen.	1,5
C2	Die Brennstoffstäbe sind quadratisch in einem Abstand von $0,286 \text{ m}$ angeordnet (vgl. Abb III). Der effektive Radius der Brennstäbe, also der Radius, den sie haben würden, wenn sie gänzlich aus $\text{UO}_2$ bestünden, beträgt $3,617 \times 10^{-2} \text{ m}$ . Schätze die Anzahl der Brennstoffstäbe $F_n$ in dem Reaktor und die Masse $M$ von $\text{UO}_2$ für den stabilen Betrieb des Reaktors ab.	1,0