Das Extremalprinzip (Gesamtpunktzahl: 10)

A Das Extremalprinzip in der Mechanik

Betrachte, wie in Abb. 1 dargestellt, die reibungsfreie Bewegung in einer horizontalen Ebene (x-y-Ebene). Die Ebene ist durch eine Gerade bei $x = x_1$ in zwei Regionen, I und II, unterteilt. Die potentielle Energie einer Punktmasse m in Region I ist $V = 0$ und in Region II $V = V_0$. Die Punktmasse bewegt sich vom Ursprung O mit der Geschwindigkeit v_1 entlang der markierten Linie unter dem Winkel θ_1 zur x-Achse. Sie erreicht den Punkt P in Region II mit einer Geschwindigkeit v_2 entlang einer Linie mit Winkel θ_2 zur x-Achse. Ignoriere im gesamten Problem T-2 die Gravitation und alle relativistischen Effekte.

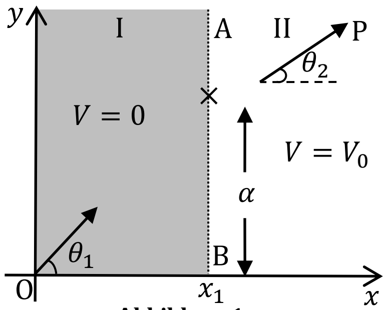


Abbildung 1

A1	Entwickle einen Ausdruck für v_2 in Abhängigkeit von m, v_1 und V_0.	**0,2**
A2	Drücke nun v_2 durch v_1, θ_1 und θ_2 aus.	**0,3**

Nun definieren wir durch $A = m\int v(s)ds$ eine Größe, die wir Wirkung nennen. Hierbei ist ds eine infinitesimale Länge entlang der Bahn der Punktmasse m, die sich mit der Geschwindigkeit $v(s)$ bewegt. Das Integral wird über den Weg ausgeführt. Für eine Punktmasse, die sich mit konstanter Geschwindigkeit v entlang eines Kreises bewegt, ist die Wirkung für einen Umlauf zum Beispiel $2\pi mRv$. Für eine Punktmasse mit konstanter Energie E kann gezeigt werden: Für alle Bahnen zwischen zwei festgesetzten Punkten bewegt sich die Punktmasse auf derjenigen Bahn, für die die oben definierte Wirkung A ein Extremum (Maximal- oder Minimalwert) annimmt. Historisch ist dies als Prinzip der kleinsten Wirkung (*principle of least action – PLA*) bekannt.

A3	Das PLA besagt, dass sich eine Punktmasse zwischen zwei festen Punkten in einer Region konstanten Potentials auf einer Geraden bewegt. Die beiden Punkte O und P in Abb. 1 haben die Koordinaten $(0,0)$ und (x_0, y_0). Der Punkt, an dem die Punktmasse von Region I in Region II übergeht, hat die Koordinaten (x_1, α). Beachte, dass x_1 fest ist und die Wirkung damit nur von α abhängt. Finde den Ausdruck für die Wirkung $A(\alpha)$. Nutze das PLA, um einen Zusammenhang zwischen dem Quotienten v_1/v_2 und den gegebenen Koordinaten zu finden.	**1,0**

B Das Extremalprinzip in der Optik

Ein Lichtstrahl bewegt sich von einem Medium I in ein Medium II. Diese haben die Brechungsindices n_1 und n_2. Die beiden Medien sind durch eine Linie parallel zur x-Achse getrennt. Der Lichtstrahl schließt einen Winkel i_1 mit der y-Achse im Medium I und i_2 im Medium II ein (siehe Abb. 2). Um die Bahn des Lichtstrahls zu bestimmen, wendest Du nun erneut das Extremalprinzip an. In der Optik ist dieses bekannt als Fermats Prinzip der kleinsten Zeit.

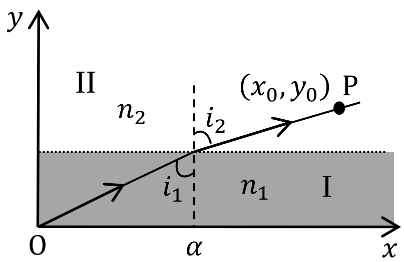


Abbildung 2

B1	Dieses Prinzip besagt, dass ein Lichtstrahl diejenige Bahn zwischen zwei Punkten durchläuft, für die die benötigte Zeit für den Lichtstrahl ein Extremum ist. Entwickle eine Beziehung zwischen $\sin i_1$ und $\sin i_2$ auf der Basis von Fermats Prinzip der kleinsten Zeit.	**0,5**

Abb. 3 zeigt eine schematische Skizze der Bahn eines Laserstrahls, der horizontal in eine Zuckerlösung eintritt. In der Zuckerlösung nimmt die Konzentration mit zunehmender Höhe ab. Damit nimmt auch der Brechungsindex der Lösung mit zunehmender Höhe ab.

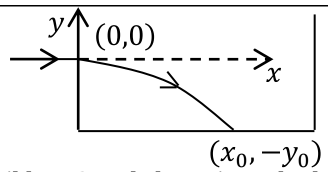


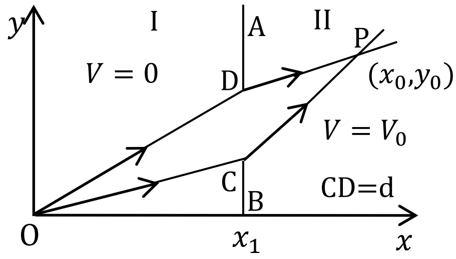
Abbildung 3: Behälter mit Zuckerlösung

B2	Nimm an, dass der Brechnungsindex $n(y)$ nur von y abhängt. Nutze Deine in B1 erhaltene Gleichung, um einen Ausdruck für die Steigung dy/dx der Bahn des Laserstrahls zu erhalten. Drücke diese durch n_0, dem Wert bei $y = 0$, und $n(y)$ aus.	**1,5**

B3	Der Laserstrahl tritt horizontal am Ursprung (0,0) in die Zuckerlösung in einer Höhe y_0 gemessen vom Boden des Behälters ein (Abb. 3). Nimm an, dass $n(y) = n_0 - ky$ mit n_0 und k als positive Konstanten ist. Entwickle einen Ausdruck für die Bahn des Laserstrahls, also für x in Abhängigkeit von y und naheliegender Größen. Hierbei kann Dir $\int \sec\theta \, d\theta = ln(\sec\theta + \tan\theta) +$ konstant mit $\sec\theta = 1/\cos\theta$ oder $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) +$ Konstante weiterhelfen.	**1,2**
B4	Berechne den Wert von x_0, dem Punkt, an welchem der Laserstrahl den Boden des Behälters trifft. Verwende $y_0 = 10{,}0$ cm, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0.050\ \mathrm{cm}^{-1}$ (1 cm = 10^{-2} m).	**0,8**

C **Das Extremalprinzip und die Wellennatur der Materie**

Untersuche nun den Zusammenhang zwischen dem PLA und der Wellennatur bewegter Teilchen. Hierfür nehmen wir an, dass eine Punktmasse, die sich von O nach P bewegt, alle möglichen Bahnen durchlaufen kann. Wir suchen nun eine Bahn, für die konstruktive Interferenz der de Broglie-Wellen auftritt.

C1	Betrachte die infinitesimale Bewegung Δs einer Punktmasse entlang seiner Bahn. Drücke die Änderung in der Phase $\Delta\varphi$ der de Broglie-Welle durch die Änderung der Wirkung ΔA und die Planckkonstante aus.	**0,6**
C2	In Teil A bewegte sich eine Punktemasse von O nach P (siehe Abb. 4). Nun wird eine undurchsichtige Wand an der Grenze zwischen den Regionen (AB) gezogen. In dieser Wand gibt es eine kleine Öffnung CD der Breite d in AB. Für die Breite der Öffnung d gilt $d \ll (x_0 - x_1)$ und $d \ll x_1$. Betrachte die beiden äußersten Bahnen OCP und ODP, so dass OCP mit der klassischen Bahn in Teil A übereinstimmt. Bestimme näherungsweise die Phasendifferenz $\Delta\varphi_{CD}$ zwischen den beiden Bahnen in erster Ordnung.  **Abbildung 4**	**1,2**

D **Interferenz von Materiewellen**

Nimm am Ursprung O eine Elektronenkanone an, die einen fokussierten Strahl Elektronen auf die kleine Öffnung F in der Wand A_1B_1 bei $x = x_1$ schießt. OFP liegen dabei auf einer Geraden. P ist ein Punkt auf dem Schirm bei $x = x_0$ (siehe Abb. 5). Die Geschwindigkeit in I ist $v_1 = 2{,}0000 \times 10^7 \mathrm{m\,s^{-1}}$ und $\theta = 10{,}0000^\circ$. Das Potential in II ist gerade so, dass die Geschwindigkeit $v_2 = 1{,}9900 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ beträgt. Der Abstand $x_0 - x_1$ ist 250,00 mm (1mm = 10^{-3}m). Ignoriere hierbei die Elektron-Elektron-Wechselwirkung.

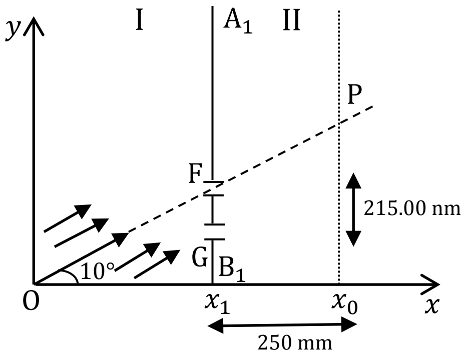


Abbildung 5

D1	Berechne die Beschleunigungsspannung U_1, wenn die Elektronen aus der Ruhe zum Punkt O beschleunigt wurden.	**0,3**
D2	Eine weitere gleichartige Öffnung (G) wird in die Wand A_1B_1 gemacht. Diese befindet sich in einem Abstand von 215,00 nm (1nm = 10^{-9}m) unterhalb der Öffnung F (Abb. 5). Die Phasendiffernz zwischen den de Broglie-Wellen, die von den Punkten F und G am Punkt P ankommen, ist $2\pi\beta$. Berechne β.	**0,8**
D3	Wie groß ist der kleinste Abstand Δy vom Punkt P auf dem Schirm, an welchem zu erwarten ist, dass keine Elektronen detektiert werden? [Beachte: die folgende Näherung kann Dir weiterhelfen: $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$]	**1,2**
D4	Der Elektronenstrahl hat eine quadratischen Querschnitt von 500nm × 500nm und die Anordnung ist 2m lang. Berechne die minimal notwendige Intensität I_{min} (Anzahl der Elektronen pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit), wenn zu jeder Zeit mindestens ein Elektron im Mittel vorhanden sein soll.	**0,4**